

## Лекция 12 (3)

### Поляризация диэлектриков. Проводники. Электроёмкость

#### Предисловие

Материал этой лекции частично повторяет школьную программу (пункты 8 и 9; см. ниже), частично описан в теоретической части лабораторных работ (пункт 3 – лаб.раб. № 2-01; пункт 9 – лаб.раб. №№ 2-03 и 2-22).

#### План

1. Виды диэлектриков и их поляризация
2. Вектор поляризации
3. Электростатическое поле в диэлектрике
4. Вектор электрического смещения
5. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике
6. Формулы для поля в диэлектрике
7. Проводники в электростатическом поле.
8. Электроёмкость проводника
9. Конденсаторы. Ёмкость конденсатора
10. Энергия заряженного проводника (конденсатора)
11. Объёмная плотность энергии электростатического поля

#### 1. Виды диэлектриков и их поляризация

В зависимости от концентрации свободных зарядов тела делятся на:

- проводники (много свободных зарядов)
- диэлектрики (свободных зарядов практически нет)
- полупроводники (свободные заряды есть, но их меньше, чем в проводниках).

#### Виды диэлектриков:

1) Диэлектрики с неполярными молекулами. **Электронная поляризация.**

Молекулы не имеют дипольного момента, так как центр тяжести отрицательных зарядов электронов совпадает с центром тяжести положительных ядер (рис.12.1,а):

$$\vec{p}_e = 0.$$

К неполярным диэлектрикам относятся вещества с симметричными молекулами, например,  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $CO_2$ . Во внешнем электрическом поле отрицательное электронное облако молекулы смещается против поля:

$$\vec{F} = q\vec{E}, \quad q < 0,$$

центры тяжести положительных и отрицательных зарядов расходятся, и молекула приобретает дипольный момент  $\vec{p}_e$  (рис.12.1,б). Он направлен по полю и пропорционален напряжённости внешнего поля:

$$\vec{p}_e = \epsilon_0 \cdot \beta \cdot \vec{E}, \quad (12.1)$$

где  $\beta$  – *поляризуемость* молекулы. Поляризуемость  $\beta$  характеризует способность молекулы приобретать дипольный момент во внешнем электрическом поле и имеет порядок величины (и размерность тоже, разумеется) объёма электронного облака,  $[\beta] = \text{м}^3$ . Действительно, чем больше объём электронного облака, тем большим может быть дипольный момент, приобретённый молекулой во внешнем поле.

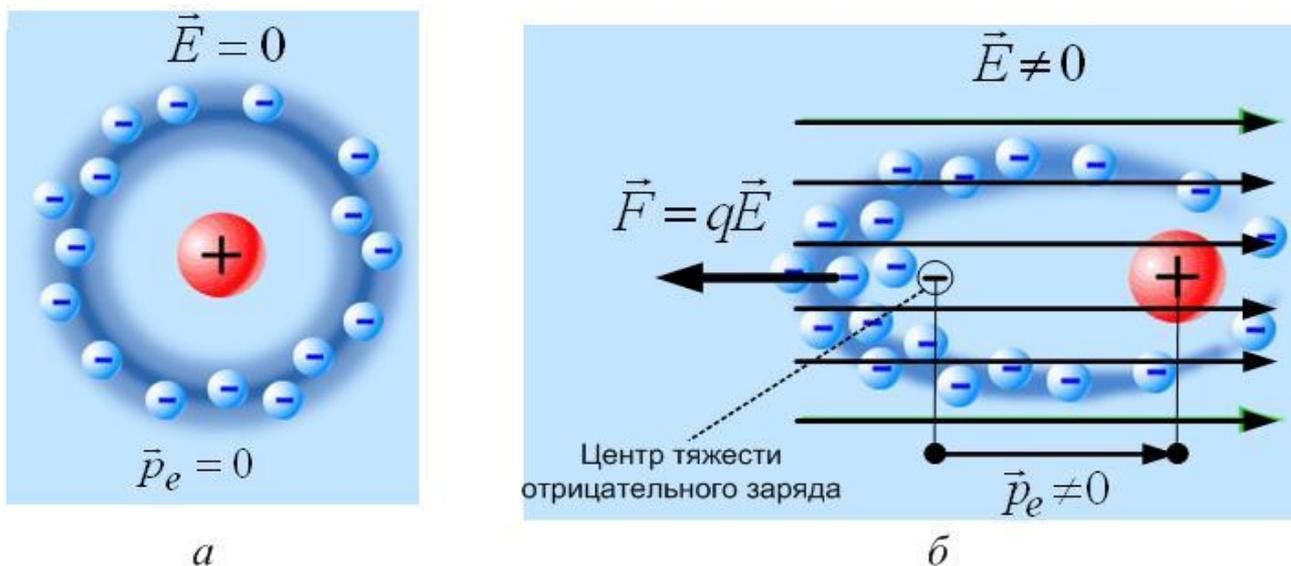


Рис.12.1

Дипольные моменты всех молекул направлены одинаково; *вещество в целом также приобретает дипольный момент – поляризуется*. Такая поляризация называется *электронной*, поскольку возникает при смещении электронного облака молекулы.

2) Полярные диэлектрики. Дипольная (ориентационная) поляризация.

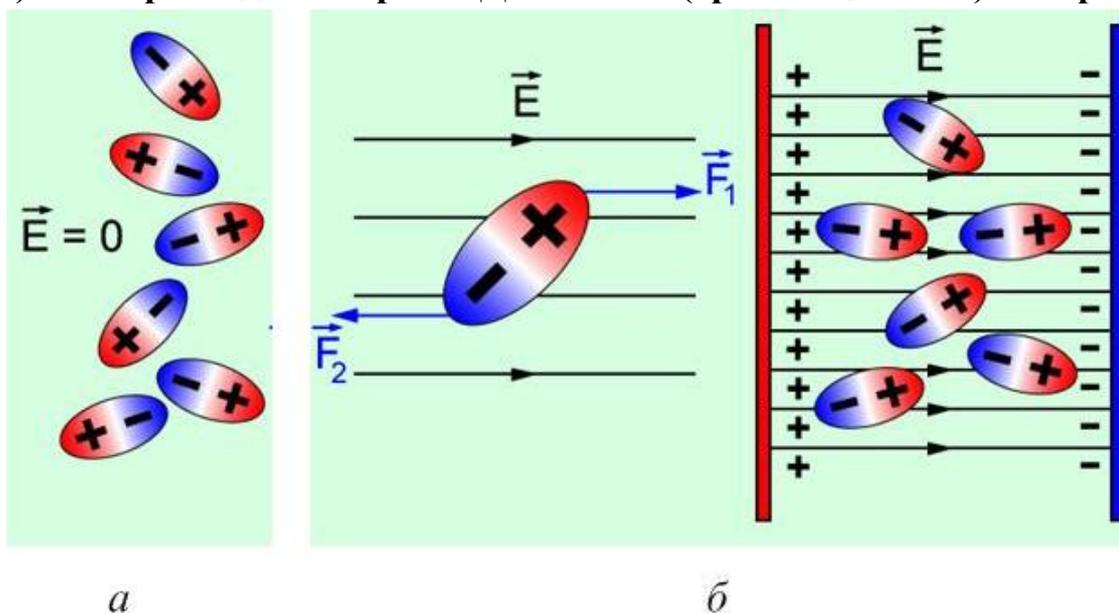


Рис.12.2

Центры тяжести таких молекул в отсутствие внешнего поля не совпадают – молекулы несимметричны (например, это  $H_2O$ ,  $HCl$ ,  $SO_2$  – , поэтому молекула обладает дипольным моментом:  $\vec{p}_e \neq 0$ . В целом вещество дипольным моментом не обладает (не поляризовано) из-за хаотичной ориентации диполей (рис.12.2,а). На молекулы-диполи во внешнем поле действует вращающий момент силы

$$\vec{M} = [\vec{p}_e \times \vec{E}], \quad (12.2)$$

разворачивающий молекулы по полю (рис.12.2,б). Из-за теплового движения полной ориентации молекул-диполей по полю нет.

### 3) Ионные диэлектрики и ионная поляризация.

В твёрдых диэлектриках с ионной кристаллической решёткой (например,  $NaCl$ ) ионы во внешнем поле слегка смещаются в противоположные стороны: положительные – по полю, отрицательные – против поля (рис.12.3).

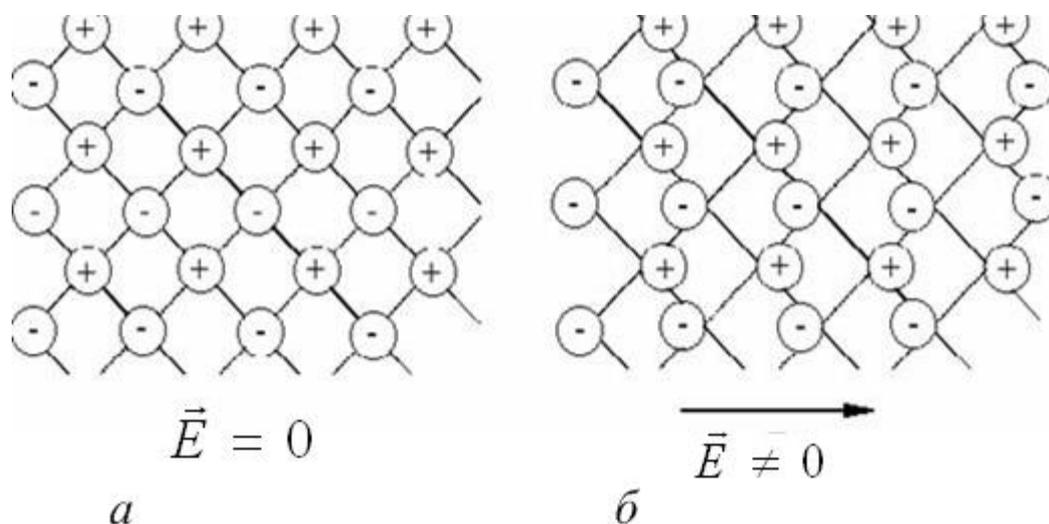


Рис.12.3

4) Есть ещё сегнетоэлектрики, но о них в этом курсе мы говорить не будем. О них можно прочитать в лабораторной работе 2-02 «Изучение электрических свойств сегнетоэлектриков».

## 2. Вектор поляризации

В любом случае во внешнем электрическом поле вещество поляризуется – приобретает дипольный момент.

Определение: суммарный дипольный момент единицы объёма вещества называется вектором поляризации:

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{P}_{\text{молекул}}}{\Delta V}. \quad (12.3)$$

Объём  $\Delta V$  :

- с одной стороны, должен быть достаточно мал, чтобы заметить отличия в поляризации в разных точках объёма образца, а не считать среднее  $\vec{P}$ , например, по всему образцу;

- с другой стороны, нельзя брать  $\Delta V$  бесконечно малым, иначе в него может войти слишком мало частиц: вычислять  $\vec{P}$ , например, для одного атома, или двух, или для десяти, бессмысленно.

Для большинства диэлектриков вектор поляризации вещества пропорционален внешнему полю:  $\vec{P} \sim \vec{E}$ . Докажем это хотя бы для неполярных диэлектриков. Просуммируем векторно дипольные моменты  $\vec{p}_e = \varepsilon_0 \cdot \beta \cdot \vec{E}$  всех  $N$  молекул, находящихся в объёме  $\Delta V$ :

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_{\text{молекул}}}{\Delta V} = \frac{N \cdot \vec{p}_e}{\Delta V} = \frac{N \cdot \varepsilon_0 \cdot \beta \cdot \vec{E}}{\Delta V} = \varepsilon_0 n \cdot \beta \cdot \vec{E},$$

где  $n = \frac{N}{\Delta V}$  – концентрация молекул (число молекул в единице объёма). Введём новую величину – **диэлектрическую восприимчивость**:

$$\aleph = n \cdot \beta, \quad (12.4)$$

тогда

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \aleph \cdot \vec{E}} \quad (12.5)$$

Диэлектрическая восприимчивость безразмерна:  $[\aleph] = [n \cdot \beta] = \frac{1}{\text{м}^3} \cdot \text{м}^3 = 1$ .

На самом деле с поляризуемостью и диэлектрической восприимчивостью не всё так просто.

○ *Во первых*, кристаллическое тело в общем случае анизотропно: свойства в различных направлениях различны. Например, вдоль длинных цепей полимерных молекул электронное облако во внешнем поле смещается сильнее, чем поперёк, то есть  $\beta_{\perp} < \beta_{\parallel}$ ; наблюдается анизотропия поляризуемости. Диэлектрическая восприимчивость  $\aleph$  также разная в разных направлениях, и (12.5) неверно; даже направления векторов  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  не будут совпадать. Для описания поляризации вещества в этом случае вводят тензор поляризуемости, но об этом мы говорить не будем.

○ *Во вторых*, есть существенная разница, находится диэлектрик в постоянном электрическом поле или переменном, и частота, с которой изменяется величина  $\vec{E}$ . В зависимости от частоты величина  $\aleph$  будет разной: наблюдается дисперсия. Это можно объяснить для ориентационной поляризации полярных диэлектриков, например, тем, что на больших частотах из-за вязкости среды молекулы просто не успевают переориентироваться при изменениях поля.

○ *В третьих*, диэлектрическая восприимчивость полярных диэлектриков зависит от температуры, так как тепловое движение мешает диполям ориентироваться. Можно считать, что  $\aleph$  обратно пропорциональная абсолютной температуре:

$$\aleph \sim \frac{1}{T}.$$

### 3. Электростатическое поле в диэлектрике

В результате поляризации диэлектрика, помещенного в однородное электрическое поле, в тонких слоях, ограничивающих его поверхности, возникают не скомпенсированные связанные поверхностные поляризационные заряды  $\sigma'$  (рис.12.4), а в неоднородном электрическом поле могут возникать еще и объемные поляризационные заряды. Согласно принципу суперпозиции, напряженность электрического поля в диэлектрике  $\vec{E}$  будет определяться векторной суммой напряженности внешнего электрического поля  $\vec{E}_0$  и напряженности поля  $\vec{E}'$ , обусловленного не скомпенсированными поляризационными зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' . \quad (12.6)$$

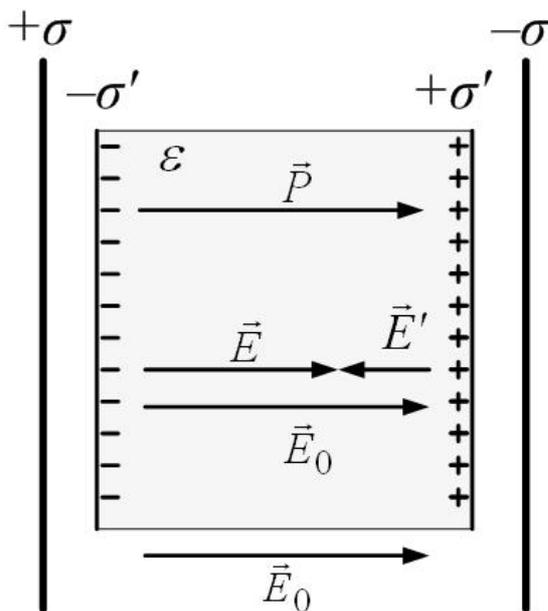


Рис.12.4

Для изотропного диэлектрика, помещенного в однородное внешнее электрическое поле, эти векторы направлены в противоположные стороны, поэтому

$$E = E_0 - E' , \quad (12.7)$$

т.е. напряженность электрического поля в диэлектрике меньше напряженности этого поля в вакууме.

Напряженность поля связанных зарядов можно выразить через поверхностную плотность связанных зарядов (напряженность поля конденсатора):

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} . \quad (12.8)$$

Поляризованность диэлектрика по определению (12.3) равна:

$$P = \frac{q'l}{V} = \frac{\sigma'Sl}{Sl} = \sigma' , \quad (12.9)$$

где  $q' = \sigma'S$  – величина связанного поляризационного заряда на всей поверхности диэлектрика,  $S$  – площадь обкладки конденсатора,  $l$  – расстояние между обкладками (толщина диэлектрика),  $q'l$  – электрический дипольный момент связанных зарядов,  $V = Sl$  – объем диэлектрика. (Предполагаем, что диэлектрик занимает весь объем конденсатора.)

Из (12.3), (12.6-12.9) получим:

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{\aleph \epsilon_0 E}{\epsilon_0} ,$$

откуда, решая уравнение  $E = E_0 - \frac{\aleph \epsilon_0 E}{\epsilon_0}$ , найдем:

$$E(1 + \aleph) = E_0 .$$

Обозначим

$$\varepsilon = (1 + \aleph), \quad (12.10)$$

тогда

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}. \quad (12.11)$$

Величину  $\varepsilon$ , численно равную отношению напряженности электрического поля в вакууме  $E_0$  к напряженности того же поля в диэлектрической среде  $E$ , называют диэлектрической проницаемостью среды. Или иначе: **диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  показывает, во сколько раз напряжённость электростатического поля уменьшается в диэлектрике по сравнению с вакуумом.**

Согласно (12.10),  $\varepsilon \geq 1$  ( $\varepsilon = 1$  для вакуума). Для стекла  $\varepsilon \approx 5$ ; для воды при  $20^\circ\text{C}$   $\varepsilon = 81$ .

Диэлектрическая проницаемость неполярных диэлектриков уменьшается с повышением температуры, поскольку  $\varepsilon = 1 + \aleph$  и  $\aleph \sim \frac{1}{T}$ .

#### 4. Вектор электрического смещения

Введём вектор электрического смещения:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (12.12)$$

В диэлектрической среде он равен:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{E_0}{E} \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_0, \quad (12.13)$$

так как  $\varepsilon = \frac{E_0}{E}$ ;  $E_0$  – поле в вакууме, то есть поле свободных зарядов.

В вакууме по определению  $\varepsilon = 1$ , а напряжённость поля  $\vec{E} \equiv \vec{E}_0$ , то есть  $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = 1 \cdot \varepsilon_0 \vec{E}_0$ . Снова получили (12.13). Именно этим удобен вектор электрического смещения  $\vec{D}$ : он одинаков в вакууме и в диэлектрике.

Вектор  $\vec{D}$  описывает поле только свободных зарядов, распределение которых в конкретных задачах обычно известно. Вектор же напряжённости поля  $\vec{E}$  описывает суммарное поле свободных и связанных (индуцированных) зарядов, возникших на границе диэлектрика (а в случае неоднородной поляризации – и в объёме тоже) в результате поляризации. Распределение этих зарядов бывает найти не так-то просто. Вектор  $\vec{D}$  оказывается удобнее для описания поля во многих задачах. Линии вектора  $\vec{D}$  начинаются и заканчиваются только на свободных зарядах (или в  $\infty$ ), но не на связанных; а линии вектора  $\vec{E}$  прерываются и свободными, и связанными зарядами (рис.12.5).

Получим ещё одно полезное соотношение для вектора  $\vec{D}$ .

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = (\aleph + 1) \varepsilon_0 \vec{E} = \aleph \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}}. \quad (12.14)$$

Это соотношение является более общим, чем (12.12) и может быть использовано в том случае, когда вектор поляризации диэлектрика не параллелен  $\vec{E}$  (рис.12.6). Так что в качестве соотношения, определяющего, что такое вектор электрического смещения  $\vec{D}$ , будем считать не (12.12), а (12.14).

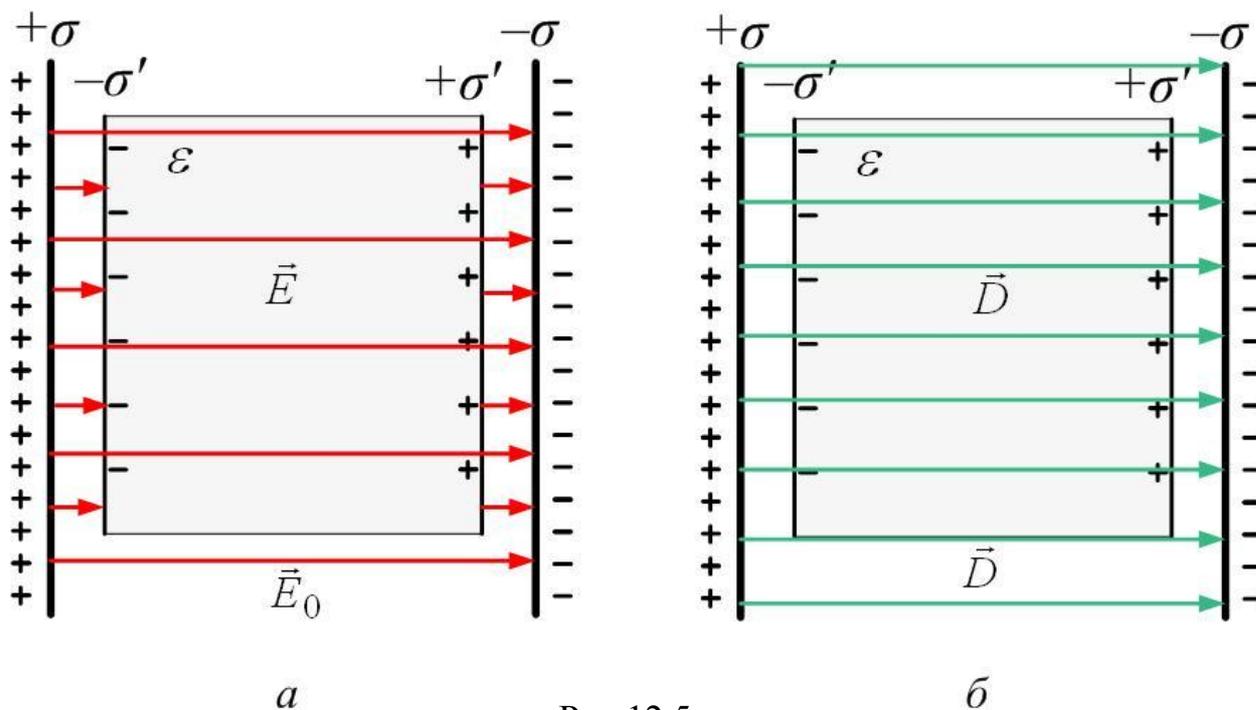


Рис.12.5

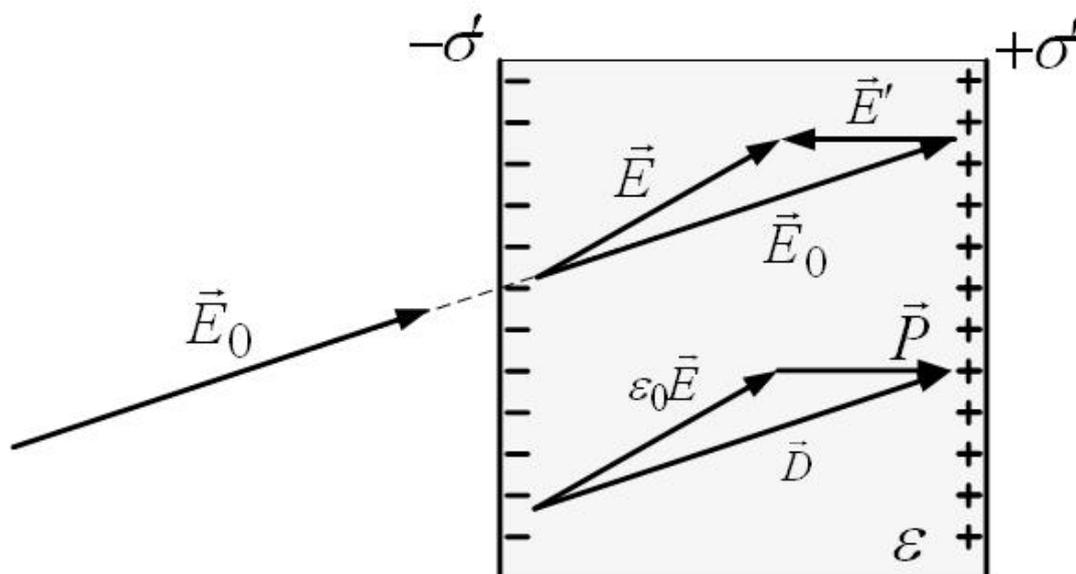


Рис.12.6

### 5. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

Найдём поток вектора  $\vec{D}$  через произвольную замкнутую поверхность, используя соотношение (12.13)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}_0$$

и применив теорему Гаусса (лекция 10) для поля  $\vec{E}_0$  свободных зарядов:

$$\oint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i^{\text{свободн.}},$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S \epsilon_0 \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \oint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i^{\text{свободн.}}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i^{\text{свободн.}}$$

(12.15)

Это – **теорема Гаусса для вектора электрического смещения**: *поток вектора электрического смещения  $\vec{D}$  через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, охваченных этой поверхностью.* Теорему Гаусса в таком виде удобно использовать, если распределение связанных поляризационных зарядов неизвестно.

Из (12.12)  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$  можно получить выражения для потока вектора  $\vec{E}$  через произвольную замкнутую поверхность: (12.16) поляризационные заряды учитывает автоматически с помощью диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ ; а (12.17) можно применять, если распределение поляризационных связанных зарядов известно. Однако надо помнить, что эти выражения нельзя применять, если  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  непараллельны, как, например, на рис.12.6.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \sum_i q_i^{\text{свободн.}} \quad (12.16)$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i (q_i^{\text{свободн.}} + q_i^{\text{связ.}}) \quad (12.17)$$

Из (12.14) можно получить такие соотношения:

$$\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S \vec{P} d\vec{S} + \epsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S}$$

$$\sum_i q_i^{\text{свободн.}} = \oint_S \vec{P} d\vec{S} + \epsilon_0 \frac{1}{\epsilon_0} \left( \sum_i q_i^{\text{свободн.}} + q_i^{\text{связ.}} \right)$$

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = - \sum_i q_i^{\text{связ.}}$$

Поток вектора поляризации определяется суммой связанных зарядов, охваченных замкнутой поверхностью.

## 6. Формулы для поля в диэлектрике

Краткий итог для поля в диэлектрике, с учётом диэлектрической проницаемости среды:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon \cdot r^3} \vec{r} - \text{закон Кулона}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon \cdot r^2} \text{ – напряженность поля точечного заряда}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} \text{ – напряженность поля плоскости}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} \text{ – напряженность поля конденсатора}$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon \cdot r} \text{ – напряженность поля нити (цилиндра при } r > R, R \text{ – радиус цилиндра)}$$

$$\oint_S E \cos \alpha dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_i q_i^{\text{свободн.}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i (q_i^{\text{свободн.}} + q_i^{\text{связ.}}), \quad \oint_S D \cos \alpha dS = \sum_i q_i^{\text{свободн.}} \text{ –}$$

теорема Гаусса

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon \cdot r} \text{ – энергия взаимодействия точечных зарядов}$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon \cdot r} \text{ – потенциал поля точечного заряда.}$$

## 7. Проводники в электростатическом поле

Поместим проводник в электростатическое поле (рис.12.7, а). На свободные заряды проводника со стороны поля действует сила, смещающая заряды. Электроны в металле движутся против поля, из точек с меньшим потенциалом в точки с большим потенциалом; тем самым разность потенциалов выравнивается, заряды смещаться перестают. Это равновесное распределение зарядов в проводнике при помещении его в электростатическое поле устанавливается очень быстро, так что в состоянии равновесия разность потенциалов любых двух точек проводника равна нулю. Потенциал проводника всюду (внутри и на поверхности проводника) одинаков:

$$\varphi_{\text{проводника}} = \text{const} . \quad (12.18)$$

Отсюда следует, что электростатического поля внутри проводника нет:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\text{grad}(\text{const}) = 0 . \quad (12.19)$$

Внутри проводника нет объёмных нескомпенсированных зарядов; заряды могут быть только на поверхности проводника. Это легко доказать с помощью теоремы Гаусса: если гауссова поверхность целиком лежит внутри проводника, то поток вектора  $\vec{E}$  через неё есть ноль, поскольку  $\vec{E} = 0$ , значит

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = 0 .$$

Поверхность проводника – эквипотенциальная, поэтому линии напряжённости к ней перпендикулярны (рис.12.7, б), а индуцированные на поверхности проводника свободные заряды разрывают линии напряжённости, так что внутри проводника поля нет.

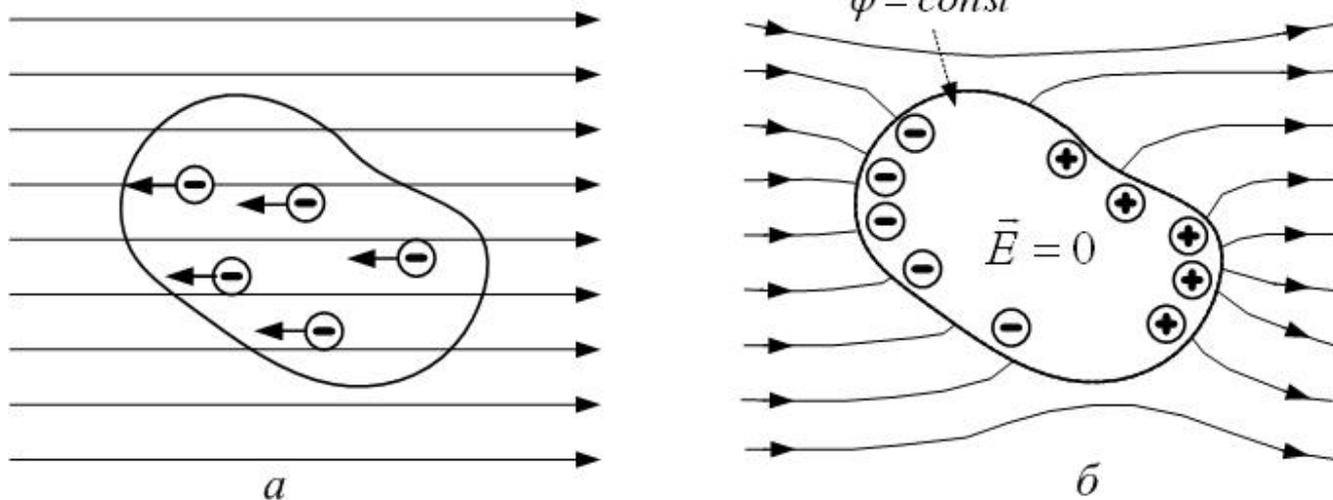


Рис.12.7

Проводник может быть полым, – это несущественно, всё равно поля внутри объёма, ограниченного проводником, не будет (рис.12.8). На этом и основан принцип экранирования от внешних полей.

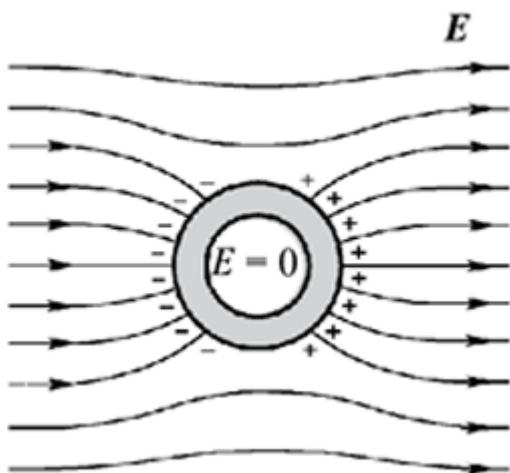


Рис.12.8

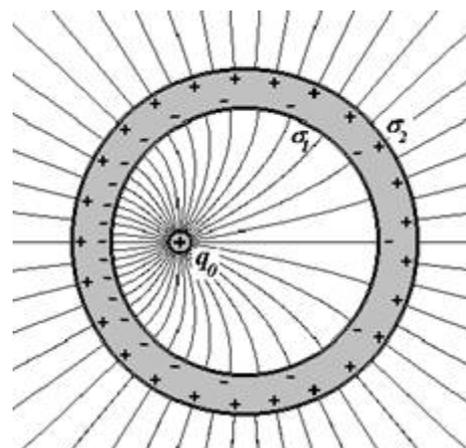


Рис.12.9

Однако если внутри полости поместить заряды, то поле в ней, конечно, будет (рис.12.9). Линии поля разрываются толщиной проводника и дальше уходят на бесконечность – поля нет **в толще** проводника.

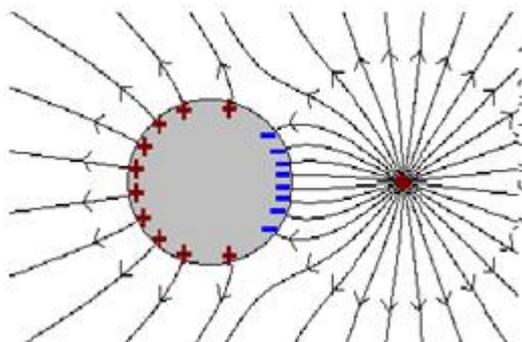


Рис.12.10

Рис.12.10 даёт представление о распределении зарядов, индуцированных на поверхности сферического проводника положительным точечным зарядом. Такое явление называется **электростатической индукцией**.

Найдём напряжённость поля вблизи поверхности проводника, поверхностная

плотность заряда которой равна  $\sigma$ , по теореме Гаусса для вектора электрического смещения (12.15):

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i^{\text{свободн.}}$$

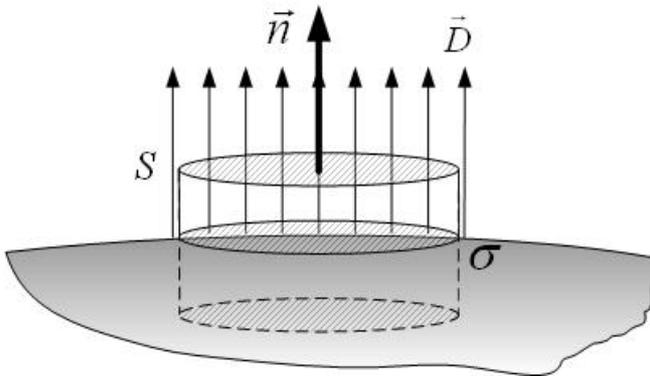


Рис.12.11

В качестве гауссовой поверхности возьмём достаточно малый цилиндр, основания которого площадью  $S$  параллельны поверхности проводника, а образующие перпендикулярны (рис.12.11). Поток вектора  $\vec{D}$  равен нулю как через боковую поверхность (линии  $\vec{D}$  к ней параллельны), так и через основание, находящееся в проводнике (там поля нет  $\vec{D} = 0$ ). Из-за малости  $S$  поток через внешнее основание,

перпендикулярное линиям  $\vec{D}$ , равен  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot S$ .

Суммарный заряд внутри объёма, ограниченного поверхностью, – это заряд кусочка поверхности площадью  $S$  и равен  $\sum_i q_i^{\text{свободн.}} = \sigma \cdot S$ , тогда

$$D \cdot S = \sigma \cdot S$$

$$\boxed{D = \sigma} \quad (12.20)$$

**Вблизи поверхности проводника величина вектора  $\vec{D}$  равна поверхностной плотности заряда.**

Соответственно,

$$E = \frac{D}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$$

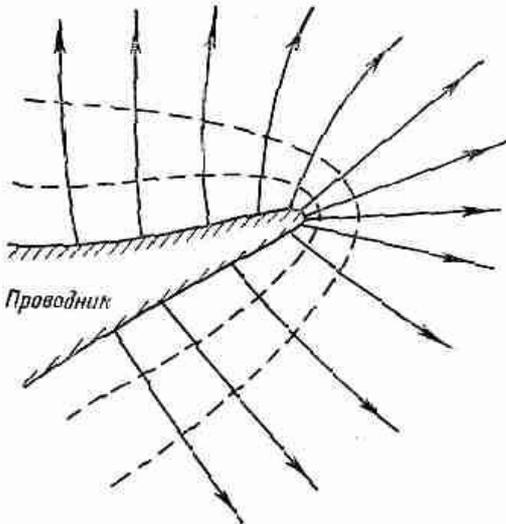


Рис.12.12

Электрические заряды по поверхности проводника распределяются неравномерно: поверхностная плотность заряда больше на выпуклостях и меньше на впадинах. Линии напряжённости всегда перпендикулярны эквипотенциальной поверхности проводника

и сгущаются на острие, где зарядов больше (рис.12.12).

## 8. Электроёмкость проводника

Рассмотрим уединённый заряженный проводник. Как было показано, потенциал  $\varphi$  любой его точки одинаков. Потенциал проводника прямо пропорционален заряду:  $\varphi \sim q$ , а коэффициент пропорциональности – это ёмкость проводника:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (12.21)$$

**Емкость уединенного проводника** показывает, какой заряд нужно сообщить данному проводнику, чтобы его потенциал изменился на единицу. Единицей емкости в системе СИ является 1 фарад – это емкость такого проводника, потенциал которого при сообщении заряда в 1 кулон изменяется на 1 вольт:

$$[C] = \frac{[q]}{[\varphi]} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \Phi.$$

Найдём ёмкость проводящей сферы радиуса  $R$ , окружённой безграничной диэлектрической средой. Потенциал поля такой сферы (см. лекцию №11) вне сферы ( $r \geq R$ ):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

На поверхности ( $r \geq R$ ) сферы потенциал равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R},$$

тогда её ёмкость

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (12.22)$$

Емкость проводника зависит от его размеров, формы, наличия по соседству других проводников и от диэлектрической проницаемости среды.

Если недалеко от заряженного проводника находится другой проводник, то из-за явления электростатической индукции ёмкость проводника меняется (возрастает): заряды на незаряженном проводнике перераспределяются так, что потенциал неуединённого проводника меньше, чем уединённого. Проще говоря, проводники влияют друг на друга.

## 9. Конденсаторы. Ёмкость конденсатора

Конденсатор – это два проводника (две обкладки), находящихся вблизи друг друга. Обкладки имеют одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды. Взаимная ёмкость (или просто ёмкость) конденсатора определяется формулой (12.23):

$$C = \frac{q}{U}, \quad (12.23)$$

где  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  – разность потенциалов обкладок.

Ёмкость конденсатора численно равна заряду, который нужно ему сообщить, чтобы разность потенциалов обкладок (напряжение на конденсаторе) было равно 1 вольту. Ёмкость зависит от формы, размеров обкладок, их взаимного расположения и диэлектрической проницаемости среды.

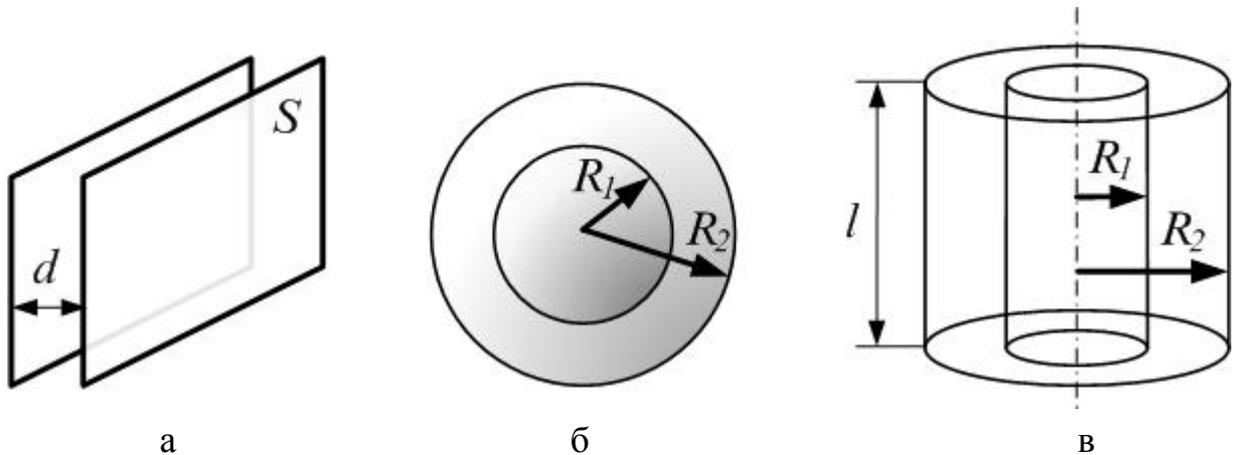


Рис.12.13

Найдём ёмкость плоского конденсатора (рис.12.13,а).

$$C_{пл.} = \frac{q}{U} = \frac{q}{E \cdot d} = \frac{\sigma \cdot S}{\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} \cdot d} = \frac{\epsilon \epsilon_0 \cdot S}{d}. \quad (12.24)$$

Для вычисления разности потенциалов на обкладках сферического конденсатора (рис.12.13,б) воспользуемся формулой связи напряженности электростатического поля и потенциала:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta \varphi_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r}.$$

Интегрировать здесь будем по радиус-вектору, проведенному от внутренней обкладки к внешней (рис.12.14). Вектор напряженности поля направлен радиально (в силу симметрии), тогда

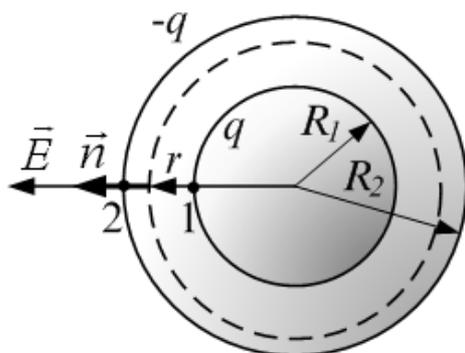


Рис.12.14

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr. \quad (12.25)$$

Напряженность поля между обкладками можно найти по теореме Остроградского-Гаусса (см.лекцию № 10), согласно которой **поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, охваченных поверхностью, деленной на  $\epsilon \epsilon_0$** :

$$\oint_S E \cos \alpha dS = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \sum_i q_i^{свободн.}. \quad (12.26)$$

В качестве Гауссовой поверхности в нашем случае следует взять сферу, концентрическую обкладкам, радиусом  $r$ :  $R_1 < r < R_2$  (рис.12.14). Из-за симметрии напряженность поля в любой точке сферы одинакова и совпадает по направлению с нормалью к поверхности в данной точке, и величину  $E$  можно вынести из под знака интеграла в (12.26), а  $\cos\alpha = 1$ . В правой части (12.26) суммарный заряд, охваченный Гауссовой поверхностью, – это заряд внутренней обкладки, то есть заряд конденсатора  $q$ . Тогда

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (12.27)$$

Здесь учтено, что  $\oint_S dS = 4\pi r^2$  – площадь сферы. Выразив  $E$  из (12.27) и подставив в (12.25), получим:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

откуда

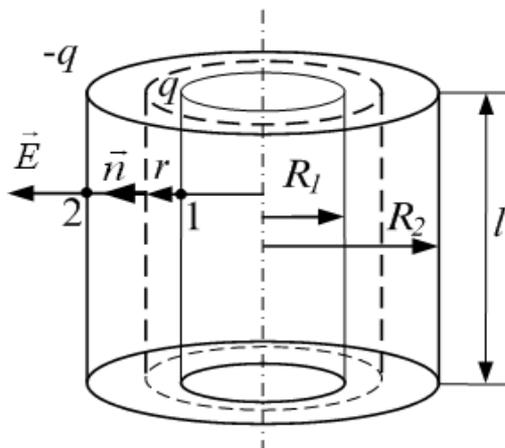


Рис.12.15

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)},$$

$$C_{\text{сфер.}} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0}{\left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}. \quad (12.28)$$

Аналогично для ёмкости цилиндрического конденсатора (рис.12.13,в) по теореме Гаусса:

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}.$$

В качестве Гауссовой поверхности взяли цилиндр, коаксиальный обкладкам цилиндрического конденсатора, радиусом  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ) и длиной  $l$  (рис.12.15).

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r l} dr = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \cdot (\ln r) \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} (\ln R_2 - \ln R_1)$$

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$C_{\text{цил.}} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (12.29)$$

При параллельном соединении конденсаторов (рис.12.16) напряжение на них одинаково и равно общему:  $U_1 = U_2 = U$ , а заряды складываются:

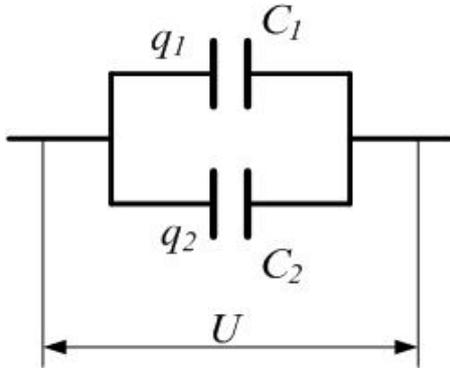


Рис.12.16

$$q = q_1 + q_2,$$

причём

$$q = C_{\text{общ.}} U$$

$$q_1 = C_1 U$$

$$q_2 = C_2 U,$$

Отсюда

$$C_{\text{общ.}} U = C_1 U + C_2 U$$

$$C_{\text{общ.}} = C_1 + C_2.$$

При последовательном соединении одинаковы заряды, а напряжения складываются (рис.12.17):

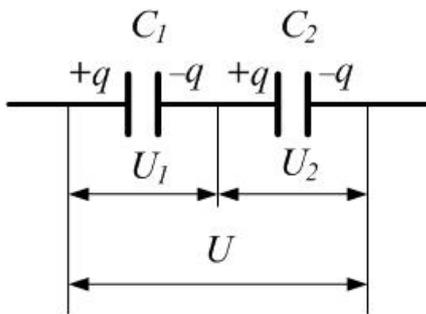


Рис.12.17

$$U = U_1 + U_2,$$

$$U = \frac{q}{C_{\text{общ.}}}, \quad U_1 = \frac{q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{q}{C_2}.$$

$$\frac{q}{C_{\text{общ.}}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2},$$

$$\frac{1}{C_{\text{общ.}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (12.30)$$

## 10. Энергия заряженного проводника (конденсатора)

Будем заряжать уединённый проводник, перемещая из бесконечности на него заряд  $dq$  (рис.12.18).

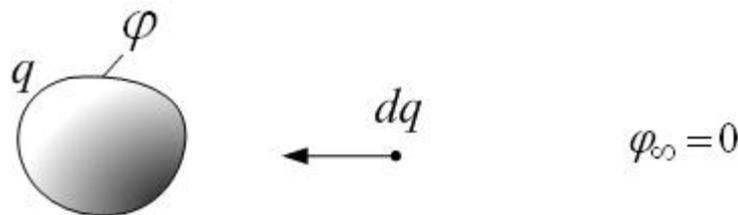


Рис.12.18

Работа внешних сил по переносу этого заряда равна произведению заряда на разность потенциалов точек, между которыми переносили заряд

$$dA = dq \cdot \Delta\phi \quad (12.31)$$

и идёт на увеличение энергии проводника

$$dA = dW.$$

На бесконечности потенциал равен нулю; потенциал проводника в процессе зарядки меняется и равен  $\varphi$ ; тогда  $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_\infty = \varphi$ . Отсюда

$$dW = \varphi \cdot dq.$$

При этом потенциал проводника увеличивается пропорционально возросшему заряду проводника (12.21):

$$d\varphi = \frac{dq}{C}.$$

Здесь  $C$  – ёмкость проводника. Тогда

$$dW = \varphi \cdot Cd\varphi. \quad (12.32)$$

Интегрируем (12.32) при условии, что вначале проводник был не заряжен и не обладал энергией (за начало отсчёта энергии приняли состояние незаряженного проводника):

$$\int_0^W dW = \int_0^\varphi \varphi \cdot Cd\varphi$$

$$W = C \cdot \int_0^\varphi \varphi \cdot d\varphi$$

$$\boxed{W = \frac{C\varphi^2}{2}}$$

(12.33)

Поскольку  $\varphi = \frac{q}{C}$ , то:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{C\left(\frac{q}{C}\right)^2}{2} = \frac{Cq^2}{2C^2}$$

$$\boxed{W = \frac{q^2}{2C}},$$

(12.34)

или:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{(C\varphi)\varphi}{2} = \frac{q\varphi}{2}$$

$$\boxed{W = \frac{q\varphi}{2}}$$

(12.35)

Аналогично можно получить для конденсатора:

$$\boxed{W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}}$$

(12.36)

## 11. Объёмная плотность энергии электростатического поля

Важен вопрос о локализации энергии: *энергия электростатического поля* проводника или конденсатора *локализована* не в проводнике или заряженных обкладках конденсатора, а *в той области пространства, где создано электростатическое поле*.

Вычислим объёмную плотность энергии электростатического поля. Напоминание: объёмной плотностью энергии называется энергия единицы объёма пространства, или отношение энергии  $dW$ , локализованной в объёме  $dV$ , к этому объёму:

$$w = \frac{dW}{dV}. \quad (12.37)$$

В плоском конденсаторе ёмкостью  $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$  поле однородно и занимает весь объём  $V = S \cdot d$ , а разность потенциалов обкладок  $U = E \cdot d$ .

Тогда

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{2d} U^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S (Ed)^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \cdot Sd \cdot E^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \cdot V \cdot E^2}{2},$$

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$$

Поскольку величина вектора электрического смещения равна  $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$ , то

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}} \quad (12.38)$$

$$w = \frac{ED}{2}$$

Полученную формулу можно использовать и для неоднородных полей.