

Лекция 7

Явления переноса

План

1. Столкновения молекул. Средняя длина свободного пробега. Среднее число столкновений в единицу времени. Вакуум.
2. Явления переноса в неравновесных системах.
3. Диффузия.
4. Вязкость.
5. Теплопроводность.
6. Явления переноса в твёрдых и жидких телах
7. Коэффициенты переноса в газах.
 - а) Коэффициент диффузии.
 - б) Коэффициент вязкости.
 - в) Коэффициент теплопроводности.
8. Общность механизма явлений переноса в газах. Выводы (обобщение – справочная таблица)

1. Столкновения молекул. Средняя длина свободного пробега. Среднее число столкновений в единицу времени.

Молекулы газа движутся хаотически и сталкиваются между собой. Пусть λ – длина свободного пробега молекулы между двумя последовательными столкновениями; λ – случайная величина. Введём её усреднённое значение: $\langle \lambda \rangle$. Средняя продолжительность свободного пробега (среднее время между двумя последовательными столкновениями) $\langle \tau \rangle$ можно выразить через среднюю длину свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ и среднюю арифметическую скорость молекул $\langle v \rangle$:

$$\langle \tau \rangle = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle}. \quad (7.1)$$

Представим траекторию молекулы как ломаную, составленную из отрезков: молекула между столкновениями летит прямолинейно и *в среднем* проходит путь, равный $\langle \lambda \rangle$, а каждый излом соответствует столкновению, когда молекула меняет направление движения (рис.7.1).

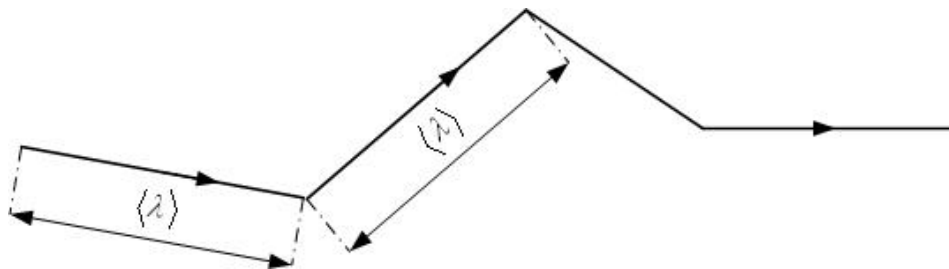


Рис.7.1

Среднее число столкновений молекулы за секунду будет равно числу изломов на длине пути, равной $\langle v \rangle$, так как путь, пройденный молекулой за 1 секунду, равен в среднем $\langle v \rangle$:

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle \lambda \rangle}. \quad (7.2)$$

Найдём выражения для $\langle z \rangle$ и для $\langle \lambda \rangle$. При этом примем следующую модель:

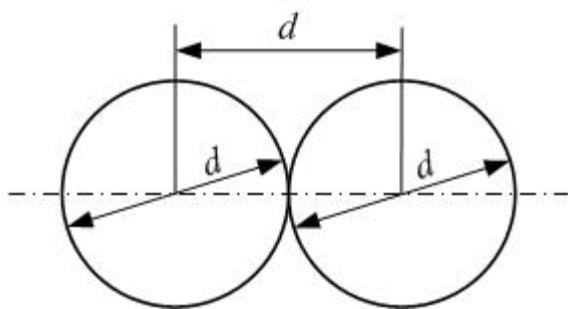


Рис.7.2

молекулы считаем упругими шариками диаметром d . При столкновениях таких молекул их центры могут сблизиться на минимальное расстояние, равное d (рис. 7.1). Молекулы – не шарики, однако понятие эффективного диаметра для них можно ввести: **эффективный диаметр молекулы $d_{\text{эфф.}}$ – это минимальное расстояние, на которое могут сблизиться при столкновении центры двух молекул.**

Эффективный диаметр имеет порядок величины 10^{-10} м. Он немного зависит от температуры: при увеличении температуры кинетическая энергия сталкивающихся молекул больше, и приблизиться они друг к другу могут на более короткое расстояние.

Введём ещё одно определение. Эффективное сечение молекулы равно

$$\sigma = \pi \cdot d_{\text{эфф.}}^2. \quad (7.3)$$

то есть **площадь круга с радиусом, равным эффективному диаметру молекулы $d_{\text{эфф.}}$, называется эффективным сечением.** Если описать вокруг молекулы сферу радиусом $d_{\text{эфф.}}$, то внутри этой сферы не сможет попасть центр другой молекулы (рис.7.3). Сечение такой сферы и есть эффективное сечение σ .

Чтобы определить среднее число столкновений молекулы с другими в единицу времени $\langle z \rangle$, сначала рассмотрим движение одной молекулы среди **неподвижных** молекул. Траектория нашей движущейся молекулы – ломаная линия. Опишем вокруг траектории цилиндр так, что ось цилиндра совпадает с траекторией молекулы, а радиус равен $d_{\text{эфф.}}$. Площадь его основания равна σ . Цилиндр – тоже ломаный (рис.7.4).

Столкновение произойдёт, если центр какой-либо молекулы попадёт в этот ломаный цилиндр. За время Δt путь молекулы равен $l = \langle v \rangle \cdot \Delta t$; это – длина цилиндра. Объём цилиндра равен $V = \sigma \cdot l = \sigma \cdot \langle v \rangle \cdot \Delta t$. Число молекул, центры которых попали в цилиндр, равно $N = n \cdot V = n \cdot \sigma \cdot l = n \cdot \sigma \cdot \langle v \rangle \cdot \Delta t$; это и есть число столкновений нашей молекулы с другими за время Δt . За единицу времени число столкновений будет равно

$$\frac{N}{\Delta t} = \frac{n \cdot \sigma \cdot \langle v \rangle \cdot \Delta t}{\Delta t} = n \cdot \sigma \cdot \langle v \rangle. \quad (7.4)$$

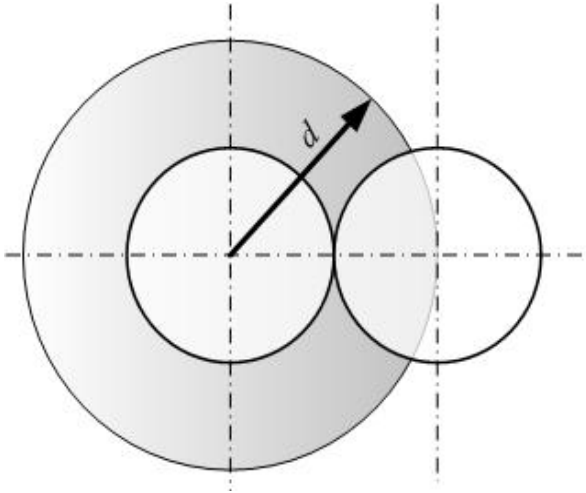


Рис.7.3

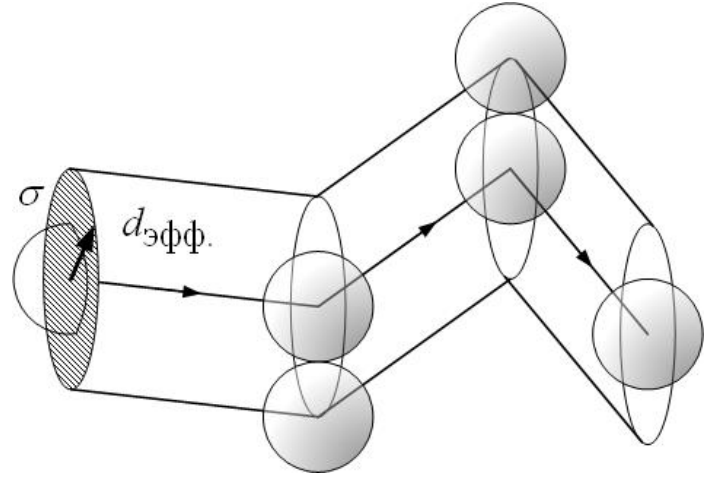


Рис.7.4

Если **молекулы движутся**, в (7.4) надо заменить среднюю скорость $\langle v \rangle$ на среднюю **относительную** скорость, тогда:

$$\langle z \rangle = n \cdot \sigma \cdot \langle v_{\text{отн.}} \rangle. \quad (7.5)$$

Относительная скорость – скорость первой молекулы относительно второй – равна:

$$\vec{v}_{\text{отн.}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad (7.6)$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – скорости первой и второй молекул соответственно. Возведём (7.6) в квадрат и усредним:

$$\begin{aligned} (\vec{v}_{\text{отн.}})^2 &= (\vec{v}_1)^2 - 2 \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + (\vec{v}_2)^2 \\ v_{\text{отн.}}^2 &= v_1^2 - 2 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot \cos \alpha + v_2^2 \\ \langle v_{\text{отн.}}^2 \rangle &= \langle v_1^2 \rangle - 2 \cdot \langle v_1 \rangle \cdot \langle v_2 \rangle \cdot \langle \cos \alpha \rangle + \langle v_2^2 \rangle \end{aligned}$$

Здесь α – угол между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$; $\langle \cos \alpha \rangle = 0$, поскольку угол может принимать любые значения с равной вероятностью из-за хаотичности движения молекул. Кроме того, $\langle v_1^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$, тогда $\langle v_{\text{отн.}}^2 \rangle = 2 \cdot \langle v^2 \rangle$, и среднеквадратичная относительная скорость

$$\sqrt{\langle v_{\text{отн.}}^2 \rangle} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{2} \cdot v_{\text{кв.}}$$

Аналогично, для средних арифметических скоростей $\langle v_{\text{отн.}} \rangle = \sqrt{2} \cdot \langle v \rangle$. Из (7.5) и (7.3) получим:

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \cdot n \cdot \sigma \cdot \langle v \rangle = \sqrt{2} \cdot n \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \langle v \rangle. \quad (7.7)$$

Наконец, средняя длина свободного пробега из (7.2):

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{\langle v \rangle}{\sqrt{2} \cdot n \cdot \sigma \cdot \langle v \rangle},$$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot n \cdot \sigma}, \quad (7.8)$$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot n \cdot \pi \cdot d^2}. \quad (7.8a)$$

Поскольку для идеального газа $p = n \cdot k \cdot T$, то из (7.8)

$$\langle \lambda \rangle = \frac{k \cdot T}{\sqrt{2} \cdot p \cdot \sigma}. \quad (7.8б)$$

Отсюда видно, что с повышением температуры при постоянном давлении длина свободного пробега молекул растёт.

Вакуум. Если уменьшать давление при постоянной температуре (уменьшать концентрацию молекул), то длина свободного пробега увеличивается, и при каком-то давлении становится равной размерам сосуда. При дальнейшем откачивании сосуда длина свободного пробега, формально рассчитанная по (7.8), должна продолжать расти, но фактически она остаётся постоянной и равной размерам сосуда, так как молекулы пролетают от стенки до стенки, не сталкиваясь друг с другом, но сталкиваются со стенками. Такое состояние достаточно разреженного газа, когда длина свободного пробега становится сравнимой с размерами сосуда, будем называть вакуумом.

2. Явления переноса в неравновесных системах.

Если какая-либо физическая характеристика вещества имеет разные значения в разных точках системы, то система будет неравновесной. В таких системах происходят необратимые процессы, называемые явлениями переноса. Следствия этих процессов – выравнивание характеристик вещества по всему объёму.

1) Если неодинакова концентрация частиц, происходит перенос массы вещества; это – диффузия.

2) Если неодинакова скорость направленного движения частиц, происходит перенос импульса; это – вязкость (внутренне трение).

3) Если неодинакова температура, происходит перенос энергии (теплоты). Это – теплопроводность.

Здесь будут рассмотрены только стационарные процессы переноса. Они возникают, если условия на границе системы не меняются достаточно долго. В этом случае в каждой точке системы в конце концов устанавливаются некоторые различающиеся от точки к точке, но не изменяющиеся со временем значения параметров, - это стационарное, но не равновесное состояние. Например, будем поддерживать два конца металлического стержня при разных, но постоянных температурах, а боковую поверхность хорошо теплоизолируем. Тогда по длине стержня установится некоторое стационарное распределение температуры, но через сечение стержня будет переноситься теплота.

Законы, описывающие явления переноса, были открыты экспериментально. Все три явления имеют много общего и могут быть описаны похожими соотношениями.

3. Диффузия.

Пусть концентрация частиц n изменяется только вдоль оси OZ (рис.7.5), тогда вдоль этой оси возникнет перенос частиц из области с большей концентрацией в область с меньшей концентрацией. Опыт показывает, что по **закону Фика** плотность потока частиц I_N пропорциональна градиенту концентрации $\frac{dn}{dz}$:

$$I_N = -D \frac{dn}{dz}, \quad (7.9)$$

где плотность потока частиц, по определению,

$$I_N = \frac{dN}{\Delta S \cdot dt} \quad (7.10)$$

это – число частиц, перенесённых за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению переноса. Или:

$$dN = -D \frac{dn}{dz} \Delta S \cdot dt. \quad (7.11)$$

Понятно, что число частиц, перенесённых за время dt через малую площадку ΔS , пропорционально и промежутку времени, и величине площадки, а также градиенту концентрации, показывающему, как быстро изменяется концентрация вдоль оси OZ. Знак «минус» в (7.9) и (7.11) показывает, что направление переноса происходит в точки с меньшей концентрацией: если производная $\frac{dn}{dz}$ положительна (концентрация возрастает в положительном направлении оси OZ), то перенос вещества идёт в отрицательном направлении оси OZ. Коэффициент пропорциональности D в (7.9) и (7.11) называется **коэффициентом диффузии**.

Умножим обе части (7.11) на массу молекулы m_0 :

$$d(N \cdot m_0) = -D \frac{d(n \cdot m_0)}{dz} \Delta S \cdot dt.$$

Здесь $n \cdot m_0 = \rho$ – плотность, а $N \cdot m_0 = m$ – масса перенесённого через площадку вещества, тогда закон Фика можно записать в виде:

$$dm = -D \frac{d\rho}{dz} \Delta S \cdot dt. \quad (7.12)$$

Отсюда физический смысл коэффициента диффузии можно сформулировать так: коэффициент диффузии численно равен массе вещества, перенесённого за единицу времени через единичную площадку при единичном градиенте плотности. Размерность коэффициента диффузии

$$[D] = \frac{[dm]}{\left[\frac{dp}{dz}\right] \cdot [\Delta S] \cdot [dt]} = \frac{\frac{\text{кг}}{\text{м}^4} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}}{\frac{\text{кг}}{\text{м}^4} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Закон (7.12) можно записать в виде, аналогичном (7.9), через плотность потока массы I_m , который равен, по определению, $I_m = \frac{dm}{\Delta S \cdot dt}$:

$$I_m = -D \frac{dp}{dz}.$$

4. Вязкость.

Вязкость (внутреннее трение) (см. лекцию №5 «Элементы механики жидкостей и газов») возникает между слоями газа или жидкости, движущимися с разными скоростями. Если скорость направленного движения слоёв газа изменяется вдоль оси OZ (рис.7.6), то по закону Ньютона, импульс, перенесённый через малую площадку ΔS за время dt , пропорционален градиенту скорости направленного движения слоёв $\frac{dv}{dz}$:

$$dp = -\eta \frac{dv}{dz} \cdot \Delta S \cdot dt, \quad (7.13)$$

где η – динамическая вязкость. Быстрый слой при этом тормозится, медленный – ускоряется в результате действия силы вязкого трения:

$$F = -\eta \frac{dv}{dz} \Delta S.$$

Из (7.13) физический смысл динамической вязкости: коэффициент вязкости η численно равен импульсу, перенесённому из слоя в слой через единичную площадку за единицу времени при единичном градиенте скорости направленного движения слоёв. Размерность коэффициента вязкости:

$$[\eta] = \frac{[dp]}{\left[\frac{dv}{dz}\right] \cdot [\Delta S] \cdot [dt]} = \frac{\frac{\text{кг}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}}{\frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{м}} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} = \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Плотность потока импульса $I_p = \frac{dp}{\Delta S \cdot dt}$ (импульс, перенесённый за единицу времени через единичную площадку) равна

$$I_p = -\eta \frac{dv}{dz}. \quad (7.14)$$

5. Теплопроводность.

Пусть вдоль оси OZ изменяется температура (рис.7.7). Опыт показывает, что количество теплоты, перенесённой через малую площадку ΔS за время dt в результате теплопроводности, пропорционально градиенту температуры $\frac{dT}{dz}$:

$$dQ = -\tau \frac{dT}{dz} \cdot \Delta S \cdot dt. \quad (7.15)$$

Здесь τ – коэффициент теплопроводности. Его физический смысл: τ численно равен количеству теплоты, перенесённой через единичную площадку за единицу времени при единичном градиенте температуры. Размерность

$$[\tau] = \frac{[dQ]}{\left[\frac{dT}{dz}\right] \cdot [\Delta S] \cdot [dt]} = \frac{\frac{\text{Дж}}{\text{м}}}{\frac{\text{К}}{\text{м}} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}.$$

Знак «минус» в уравнении теплопроводности (7.15) означает, что теплота переносится из области с большей температурой в область с меньшей температурой. Введём плотность потока тепловой энергии: $I_Q = \frac{dQ}{\Delta S \cdot dt}$ – количество теплоты, перенесённой за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению переноса. Так же как для двух предыдущих явлений переноса, для теплопроводности можно записать уравнение переноса через плотность потока тепловой энергии:

$$I_Q = -\tau \frac{dT}{dz}. \quad (7.16)$$

Уравнение теплопроводности (7.15), (7.16) – это **закон Фурье**.

6. Явления переноса в твёрдых и жидких телах также имеют место. Однако диффузия в жидкостях протекает медленнее, чем в газах, а для некоторых твёрдых тел при комнатной температуре практически не заметна. Это объясняется меньшей подвижностью частиц в конденсированной фазе, более плотной упаковкой частиц, а также тем, что частицы взаимодействуют друг с другом. Молекула жидкости некоторое время колеблется около своего положения равновесия, и изменяет его, перескакивая в соседнее положение, если затратит энергию, равную энергии активации. С ростом температуры число молекул жидкости, имеющих энергию, достаточную для преодоления этого потенциального барьера, возрастает, и подвижность молекул растёт. Это приводит к увеличению коэффициента диффузии жидкости. Коэффициент вязкости жидкости, напротив, с ростом температуры уменьшается, так как молекулы легче меняют своё положение и, например, при движении тела в жидкости легче «пропускают» его, перестраиваясь в другое положение. Сами же коэффициенты вязкости для жидкостей на несколько порядков больше, чем для газов.

Теплопроводность жидких и твёрдых тел больше, чем газов. Это объясняется взаимодействием частиц, в результате которого тепловая энергия передаётся быстрее. У металлов теплопроводность большая за счёт очень подвижных электронов.

Пористые твёрдые тела являются хорошими теплоизоляторами – за счёт пор, заполненных воздухом.

7. Коэффициенты переноса в газах.

Молекулярно-кинетическая теория идеального газа позволяет получить уравнения переноса теоретическим путём и дать выражение для коэффициентов переноса. Молекулы газа, двигаясь хаотически, переходят в другие части системы и переносят массу, импульс, связанный с направленным движением слоёв газа, либо тепловую энергию.

а) Коэффициент диффузии

Пусть концентрация уменьшается с координатой Z по какому-либо закону (рис.7.5). Пусть слева от площадки концентрация больше, чем справа: $n_1 > n_2$.

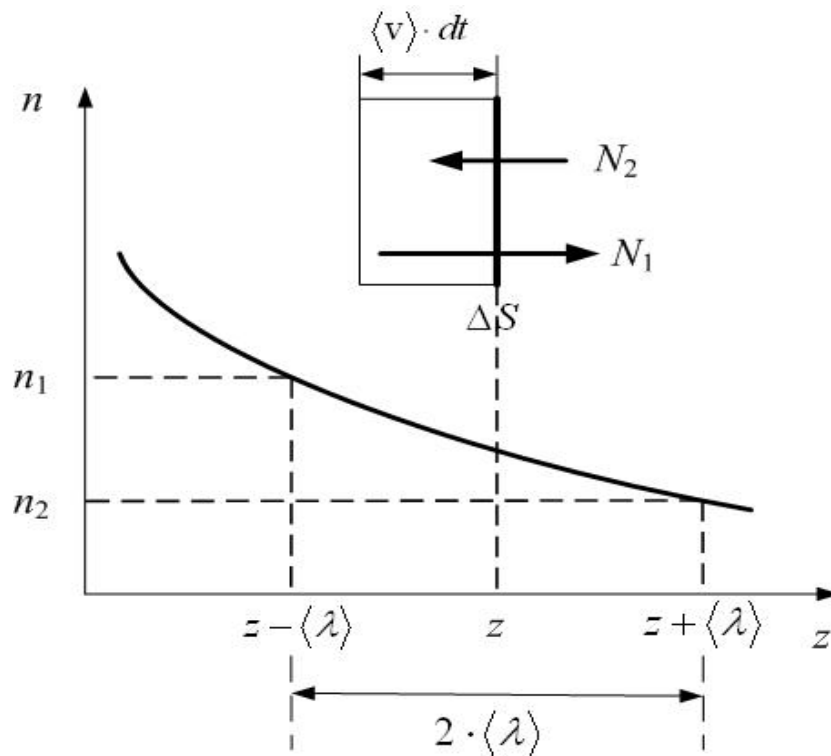


Рис.7.5

Выберем малую площадку ΔS , перпендикулярную оси OZ . Будем считать, что все молекулы могут двигаться только параллельно координатным осям и имеют одинаковые скорости теплового движения, равные средней арифметической $\langle v \rangle$. Площадку могут пересечь молекулы, которые летели по

направлению к ней, а это $\frac{1}{6}$ часть всех молекул: ещё $\frac{1}{6}$ летит от площадки тоже параллельно оси OZ, и ещё по $\frac{1}{3}$ движутся параллельно двум другим осям. За время dt до площадки дойдут те молекулы, которые были от площадки на расстоянии не больше, чем $\langle v \rangle \cdot dt$, то есть находились в объёме $dV = \Delta S \cdot \langle v \rangle \cdot dt$. Концентрация молекул слева от площадки n_1 , поэтому число молекул, пересекающих площадку слева направо за время dt , равно:

$$N_1 = \frac{1}{6} n_1 \cdot dV. \quad (7.17)$$

Аналогично, число молекул, пересекающих площадку справа налево тот же промежуток времени, равно:

$$N_2 = \frac{1}{6} n_2 \cdot dV. \quad (7.18)$$

Результирующий перенос будет в положительном направлении оси OZ:

$$dN = N_1 - N_2 = \frac{1}{6} (n_1 - n_2) dV = \frac{1}{6} (n_1 - n_2) \cdot \Delta S \cdot \langle v \rangle \cdot dt. \quad (7.19)$$

Возникает вопрос: где именно, как далеко от площадки, нужно взять концентрации n_1 и n_2 ? Последний раз перед пересечением площадки молекулы сталкиваются с другими молекулами и изменяют направление движения на расстоянии от площадки, равном длине свободного пробега; следовательно, они перенесут через неё информацию о концентрации, сложившуюся на расстоянии $\langle \lambda \rangle$ от площадки. Тогда, если функция $n(z)$ достаточно гладкая, можно записать производную её по координате как отношение конечных приращений (см. рис.7.5):

$$\frac{dn}{dz} = -\frac{\Delta n}{2\langle \lambda \rangle} = -\frac{n_1 - n_2}{2\langle \lambda \rangle}. \quad (7.20)$$

В (7.20) учтено, что производная $\frac{dn}{dz}$ убывающей функции отрицательна, а $n_1 - n_2 > 0$. Далее, из (7.19) и (7.20) получим:

$$\begin{aligned} n_1 - n_2 &= -2\langle \lambda \rangle \frac{dn}{dz} \\ dN &= -\frac{1}{6} \cdot 2\langle \lambda \rangle \frac{dn}{dz} \cdot \Delta S \cdot \langle v \rangle \cdot dt = -\frac{1}{3} \cdot \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \cdot \frac{dn}{dz} \cdot \Delta S \cdot dt. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Сравнив (7.21) с (7.11), получим, что коэффициент диффузии равен

$$D = \frac{1}{3} \cdot \langle \lambda \rangle \langle v \rangle. \quad (7.22)$$

б) Коэффициент вязкости

При выводе формулы для коэффициента вязкости рассуждения аналогичны. Пусть скорость направленного движения слоёв газа убывает с координатой Z (рис.7.6). Концентрации молекул слева и справа одинаковы, и за время dt площадку пересечёт одинаковое число молекул, равное

$$N = \frac{1}{6} n \cdot \Delta S \cdot \langle v \rangle \cdot dt . \quad (7.23)$$

Импульс молекул, находящихся слева от площадки, связанный с направленным движением слоёв газа, равен $m_0 v_1$. Эти молекулы перенесут слева направо импульс суммарный p_1 :

$$p_1 = N \cdot m_0 v_1 .$$

Аналогично, в обратном направлении будет перенесён импульс

$$p_2 = N \cdot m_0 v_2 .$$

Результирующий перенос:

$$dp = p_1 - p_2 = N \cdot m_0 (v_1 - v_2) = m_0 (v_1 - v_2) \cdot \frac{1}{6} n \cdot \Delta S \cdot \langle v \rangle \cdot dt . \quad (7.24)$$

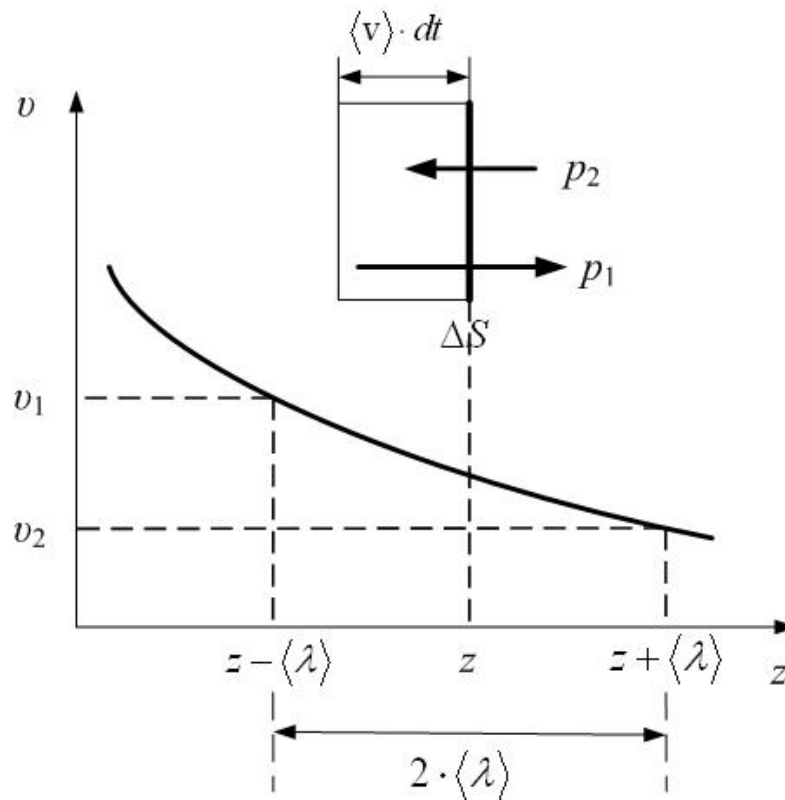


Рис.7.6

Молекулы, переходя из более быстрого слоя, движущегося со скоростью v_1 , в более медленный слой, движущийся со скоростью v_2 , переносят свой импульс, связанный с направленным движением слоёв, и медленный слой в целом ускоряется. Наоборот, более медленные молекулы переходят в быстрый слой и в

целом его притормаживают. Это и проявляется как вязкость: скорости направленного движения слоёв выравниваются.

Аналогично (7.20) выразим производную $\frac{dv}{dz}$ (градиент скорости направленного движения):

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{\Delta v}{2\langle\lambda\rangle} = -\frac{v_1 - v_2}{2\langle\lambda\rangle}. \quad (7.25)$$

Молекулы, переходя через площадку, переносят через неё импульсы, связанные с теми скоростями направленного движения, которые сложились на расстоянии $\langle\lambda\rangle$ от площадки. Из (7.24) и (7.25):

$$v_1 - v_2 = -2\langle\lambda\rangle \frac{dv}{dz},$$

$$dp = -m_0 \cdot 2\langle\lambda\rangle \frac{dv}{dz} \cdot \frac{1}{6} n \cdot \Delta S \cdot \langle v \rangle \cdot dt = -\frac{1}{3} m_0 \cdot n \langle\lambda\rangle \langle v \rangle \cdot \frac{dv}{dz} \cdot \Delta S \cdot dt. \quad (7.26)$$

Сравнив (7.26) и (7.13), получим коэффициент динамической вязкости:

$$\eta = \frac{1}{3} m_0 \cdot n \langle\lambda\rangle \langle v \rangle, \quad (7.27)$$

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle\lambda\rangle \langle v \rangle, \quad (7.28)$$

так как плотность $\rho = m_0 \cdot n$.

Коэффициент вязкости газа с ростом температуры при постоянном давлении растёт: и за счёт увеличения скорости хаотического движения:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \cdot m_0}},$$

и за счёт увеличения длины свободного пробега (7.8б): $\langle\lambda\rangle = \frac{k \cdot T}{\sqrt{2} \cdot p \cdot \sigma}$.

в) Коэффициент теплопроводности

Пусть вдоль оси OZ изменяется температура (рис.7.7).

В результате теплового движения молекулы переносят через площадку свои средние тепловые энергии, которые сложились на расстоянии $\langle\lambda\rangle$ от площадки в точках с координатами $z - \langle\lambda\rangle$ и $z + \langle\lambda\rangle$. Средняя энергия молекулы равна $\langle E \rangle = \frac{i}{2} k \cdot T$; здесь i – число степеней свободы молекулы (см. предыдущую лекцию). Тогда тепловая энергия, перенесённая слева направо, равна

$$Q_1 = N \frac{i}{2} k \cdot T_1,$$

а в обратную сторону

$$Q_2 = N \frac{i}{2} k \cdot T_2.$$

Результирующий перенос с учётом (7.23):

$$dQ = Q_1 - Q_2 = N \cdot \frac{i}{2} k \cdot (T_1 - T_2) = \frac{1}{6} n \cdot \Delta S \cdot \langle v \rangle \cdot dt \frac{i}{2} k \cdot (T_1 - T_2). \quad (7.28)$$

Градиент температуры равен:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\Delta T}{2\langle \lambda \rangle} = -\frac{T_1 - T_2}{2\langle \lambda \rangle},$$

тогда $T_1 - T_2 = -2\langle \lambda \rangle \frac{dT}{dz}$

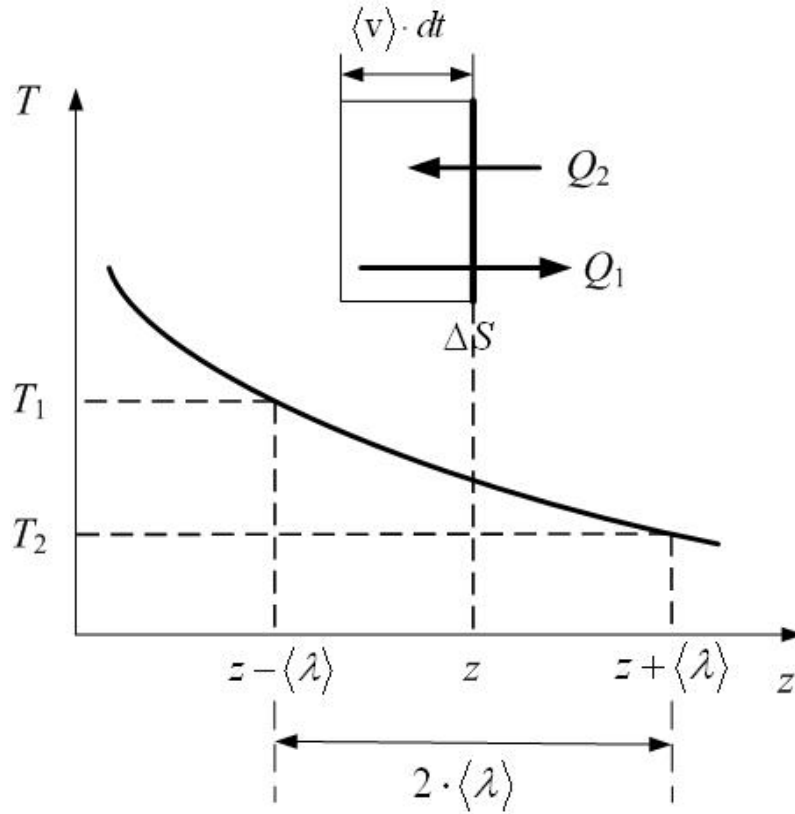


Рис.7.7

$$dQ = -\frac{1}{6} n \cdot \Delta S \cdot \langle v \rangle \cdot dt \frac{i}{2} k \cdot 2\langle \lambda \rangle \frac{dT}{dz} = -\frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle n \frac{i}{2} k \cdot \frac{dT}{dz} \cdot \Delta S \cdot dt. \quad (7.29)$$

Сравнивая (7.29) и (7.15), получим коэффициент теплопроводности:

$$\tau = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle n \frac{i}{2} k. \quad (7.30)$$

Преобразуем его, учтя, что

$$\begin{aligned} \rho &= m_0 \cdot n, \\ \mu &= m_0 \cdot N_A, \\ R &= k \cdot N_A. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle n \frac{i}{2} k \frac{m_0 \cdot N_A}{\mu} \\ \tau &= \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho \frac{i}{2} \frac{R}{\mu} \\ \tau &= \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho \frac{C_V}{\mu} \\ \tau &= \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho \cdot c_V ,\end{aligned}\quad (7.31)$$

где $C_V = \frac{dU_m}{dT} = \frac{i}{2} R$ – молярная теплоёмкость газа при постоянном объёме;
 $c_V = \frac{C_V}{\mu} = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}$ – его удельная теплоёмкость (подробнее теплоёмкостях в лекции «Термодинамика»).

Коэффициент теплопроводности при постоянной температуре не зависит от давления: из (7.8) и (7.31) следует:

$$\tau = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho \cdot c_V = \frac{1}{3} \langle v \rangle \frac{\rho \cdot c_V}{\sqrt{2} \cdot n \cdot \sigma} = \frac{1}{3} \langle v \rangle \frac{\frac{m}{V} \cdot c_V}{\sqrt{2} \cdot \frac{N}{V} \cdot \sigma} = \frac{1}{3} \langle v \rangle \frac{m \cdot c_V}{\sqrt{2} \cdot N \cdot \sigma},$$

то есть τ не меняется, потому что плотность и концентрация изменяются синхронно; уменьшение плотности компенсируется увеличением $\langle \lambda \rangle$. Но если газ достиг состояния вакуума, то в качестве длины свободного пробега нужно брать расстояние между стенками сосуда, и $\langle \lambda \rangle = l_{\text{сосуда}} = \text{const}$. Уменьшение плотности ничем не компенсируется, и теплопроводность разреженного газа уменьшается. Это используется практически в обычных бытовых термосах, имеющих двойные стенки, между которыми вакуум – разреженный воздух. За счёт вакуума достигнута малая теплопроводность стенок термоса.

8. Общность механизма явлений переноса в газах.

Все явления переноса в газах обусловлены хаотическим движением молекул: в результате теплового движения молекулы переносят по всему объёму массу; импульс, связанный с направленным движением; тепловую энергию. Вследствие этого коэффициенты переноса связаны друг с другом. Из (7.22), (7.28) и (7.31) следует:

$$\eta = D \cdot \rho , \quad (7.32)$$

$$\tau = D \cdot \rho \cdot c_V , \quad (7.33)$$

$$\tau = \eta \cdot c_V . \quad (7.34)$$

В таблице 7.1 обобщена информация о явлениях переноса. Ещё раз стоит подчеркнуть, что законы Ньютона, Фика, Фурье – экспериментальные. Они

описывают явления переноса не только в газах, но и в жидкостях и твёрдых телах. Выражения **для коэффициентов переноса можно использовать только для идеального газа**, – они получены в рамках этой модели.

Таблица 7.1.

Явление	Причина (grad)	Что переносится	Уравнение переноса	Коэффициент переноса (только для газа)	Связь с другими коэффициентами переноса
Диффузия	$\frac{dn}{dz}$	Вещество (молекулы) N	$dN = -D \frac{dn}{dz} \Delta S \cdot dt$ $I_N = -D \frac{dn}{dz}$	$D = \frac{1}{3} \cdot \langle \lambda \rangle \langle v \rangle$	-
	$\frac{d\rho}{dz}$	Масса m	$dm = -D \frac{d\rho}{dz} \Delta S \cdot dt$ $I_m = -D \frac{d\rho}{dz}$		
Вязкость	$\frac{dv}{dz}$	Импульс p	$dp = -\eta \frac{dv}{dz} \cdot \Delta S \cdot dt$ $I_p = -\eta \frac{dv}{dz} \Delta z$	$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle \lambda \rangle \langle v \rangle$	$\eta = D \cdot \rho$
			$F = -\eta \frac{dv}{dz} \Delta S$		
Теплопроводность	$\frac{dT}{dz}$	Теплота Q	$dQ = -\tau \frac{dT}{dz} \cdot \Delta S \cdot dt$ $I_Q = -\tau \frac{dT}{dz}$	$\tau = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}$ $\tau = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho \cdot c_V$	$\tau = D \cdot \rho \cdot c_V$ $\tau = \eta \cdot c_V$