Лекция 3

Динамика вращательного движения

Предисловие

Обращаю внимание студентов на то, что ЭТОТ материал в школе не рассматривался АБСОЛЮТНО (кроме понятия момента силы).

План

1. Закон динамики вращательного движения
   1a. Второй закон Ньютона для вращательного движения
   1b. Момент силы
   1c. Момент пары сил
   1d. Момент инерции
2. Моменты инерции некоторых тел:
   a. Кольцо (тонкостенный цилиндр)
   b. Толстостенный цилиндр
   c. Сплошной цилиндр
   d. Шар
   e. Тонкий стержень
3. Теорема Штейнера
4. Момент импульса тела. Изменение момента импульса. Импульс момента силы. Закон сохранения момента импульса.
5. Работа при вращательном движении
6. Кинетическая энергия вращения
7. Сопоставление величин и законов для поступательного и вращательного движения

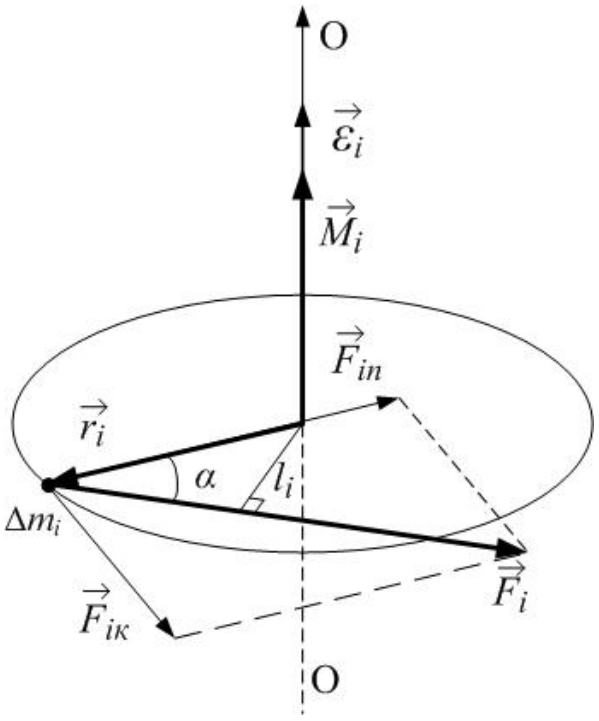

Рис.3.1

1a. Второй закон Ньютона для вращательного движения

Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси OO (рис.3.1). Разобьем это твердое тело на отдельные элементарные массы Δm_i. Равнодействующую всех сил, приложенных к Δm_i, обозначим через $\vec{F}_i$. Достаточно рассмотреть случай, когда сила $\vec{F}_i$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения: составляющие сил, параллельные оси, не могут влиять на вращение тела, так как ось закреплена. Тогда уравнение второго закона Ньютона для касательных

составляющих силы и ускорения запишется в виде:

$$F_{ik} = \Delta m_i a_{ik}. \qquad (3.1)$$

Нормальная составляющая силы F_{in} обеспечивает центростремительное ускорение и на угловое ускорение не влияет. Из (1.27) – см.лекцию 1:

$$a_{ik} = \varepsilon \times r_i,$$

где r_i – радиус вращения i-той точки. Тогда

$$F_{ik} = \Delta m_i \times \varepsilon \times r_i. \qquad (3.2)$$

Умножим обе части (3.2) на r_i:

$$F_{ik} \times r_i = \Delta m_i \times \varepsilon \times r_i \times r_i. \qquad (3.3)$$

Заметим, что

$$F_{ik} \times r_i = F_i \times \sin\alpha \times r_i = F_i \times l_i, \qquad (3.4)$$

где α – угол между вектором силы $\vec{F}_i$ и радиус-вектором точки $\vec{r}_i$ (рис.3.1), l_i – перпендикуляр, опущенный на линию действия силы из центра вращения (плечо силы). Введём понятие момента силы $\vec{M}$.

1b. Момент силы

Моментом силы относительно оси называется вектор, направленный по оси вращения и связанный с направлением силы правилом буравчика, модуль которого равен произведению силы на ее плечо: $M = F \times l$. ***Плечо силы*** l относительно оси вращения – это кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вращения. Размерность момента силы:

$$[M] = Н \times м.$$

В векторной форме момент силы относительно точки:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \qquad (3.5)$$

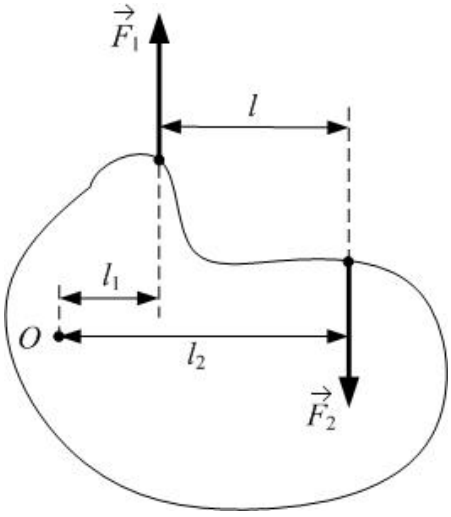

Рис.3.2

Вектор момента силы перпендикулярен и силе, и радиус-вектору точки её приложения:

$$\vec{M} \perp \vec{F}; \qquad \vec{M} \perp \vec{r}.$$

Если вектор силы перпендикулярен оси, то вектор момента силы направлен по оси по правилу правого винта, а величина момента $\vec{M}$ силы относительно этой оси (проекция на ось) определяется формулой (3.4):

$$M_z = [r \times F]_z = F \times r \times \sin\alpha = F \times l. \qquad (3.6)$$

Момент силы зависит и от величины силы, и от плеча силы. Если сила параллельна оси, то $M_z = 0$.

1c. Момент пары сил

Пара сил – это две равные по величине и противоположные по направлению силы, линии действия которых не совпадают (рис.3.2). Плечо пары сил – это расстояние между линиями действия сил. Найдём суммарный момент пары сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ ($F_1 = F_2 = F$) в проекции на ось, проходящую через точку О:

$$M = F_2 \cdot l_2 - F_1 \cdot l_1 = F \cdot (l_1 + l) - F \cdot l_1 = F \cdot l .$$

То есть момент пары сил равен произведению величины силы на плечо пары:

$$M_{пары\ сил} = F \cdot l . \qquad (3.6)$$

Вернёмся к (3.3). С учётом (3.4) и (3.6):

$$M_i = \Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \varepsilon . \qquad (3.7)$$

1d. Момент инерции

Определение: скалярная величина $\Delta m_i r_i^2$, равная произведению массы материальной точки на квадрат ее расстояния до оси, называется ***моментом инерции материальной точки*** относительно оси ОО:

$$I = mr^2 . \qquad (3.8)$$

Размерность момента инерции

$$[I] = кг \cdot м^2 .$$

Из (3.7):

$$I_i = \Delta m_i \cdot r_i^2 ;$$

$$M_i = I_i \cdot \varepsilon . \qquad (3.9)$$

Векторы $\vec{M}_i$ и $\vec{\varepsilon}$ совпадают по направлению с осью вращения, связаны с направлением вращения по правилу буравчика, поэтому равенство (3.9) можно переписать в векторной форме:

$$\vec{M}_i = I_i \vec{\varepsilon} ;$$

$$\vec{M}_i = \Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \vec{\varepsilon} . \qquad (3.10)$$

Просуммируем (3.10) по всем элементарным массам, на которые разбито тело:

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{\varepsilon} \sum_i \left(\Delta m_i r_i^2 \right). \qquad (3.11)$$

Здесь учтено, что угловое ускорение всех точек твердого тела одинаково, и его можно вынести за знак суммы. В левой части равенства стоит сумма моментов всех сил (и внешних, и внутренних), приложенных к каждой точке тела. Но по третьему закону Ньютона, силы, с которыми точки тела взаимодействуют друг с другом (внутренние силы), равны по величине и противоположны по

направлению и лежат на одной прямой, поэтому их моменты компенсируют друг друга. Таким образом, в левой части (3.11) остается суммарный момент только внешних сил: $\sum_i \vec{M}_i = \vec{M}^{внешних}$.

Сумма произведений элементарных масс на квадрат их расстояний от оси вращения называется ***моментом инерции твердого тела*** относительно данной оси:

$$I = \sum_i \left(\Delta m_i r_i^2\right). \tag{3.12}$$

Таким образом, $\vec{M}^{внешн.} = I\vec{\varepsilon}$; – это и есть основной закон динамики вращательного движения твёрдого тела (аналог второго закона Ньютона $\vec{a} = \frac{\vec{F}^{внешн.}}{m}$): ***угловое ускорение тела прямо пропорционально суммарному моменту внешних сил и обратно пропорционально моменту инерции тела***:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}^{внешн.}}{I}. \tag{3.13}$$

Момент инерции I **твердого тела является** ***мерой инертных свойств твердого тела при вращательном движении*** и аналогичен массе тела во втором законе Ньютона. Он существенно зависит не только от массы тела, но и от ее распределения относительно оси вращения (в направлении, перпендикулярном оси).

В случае непрерывного распределения массы сумма в (3.12) сводится к интегралу по всему объему тела:

$$I = \int_m r^2 dm. \tag{3.14}$$

2. Моменты инерции некоторых тел:

2a. Момент инерции тонкого кольца относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости кольца.

$$I = \int_m r^2 dm = \int_m R^2 dm = R^2 \int_m dm = R^2 m,$$

$$I = mR^2, \tag{3.15}$$

поскольку для любого элемента кольца dm его расстояние до оси одинаково и равно радиусу кольца: $r = R$.

2b. Толстостенный цилиндр (диск) с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2.

Вычислим момент инерции однородного диска плотностью ρ, высотой h, внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 (рис.3.3) относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска. Разобьем диск на тонкие кольца толщиной dr и высотой h так, что внутренний радиус кольца равен r, внешний – $(r+dr)$. Объем такого кольца $dV = h \cdot dS = h \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$, где $dS = 2\pi \cdot r \cdot dr$ – площадь основания тонкого кольца. Его масса:

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot h \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr. \qquad (3.16)$$

Подставим dm в (3.14) и проинтегрируем по r ($R_1 \le r \le R_2$):

$$I = \int_m r^2 \cdot dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho \cdot h \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr = 2\rho \cdot \pi \cdot h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\rho \cdot \pi \cdot h \left(\frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_{R_1}^{R_2} =$$

$$= \frac{\rho \cdot \pi \cdot h \left(R_2^4 - R_1^4 \right)}{2} = \frac{\rho \cdot \pi \cdot \left(R_2^2 - R_1^2 \right)\left(R_2^2 + R_1^2 \right)}{2}$$

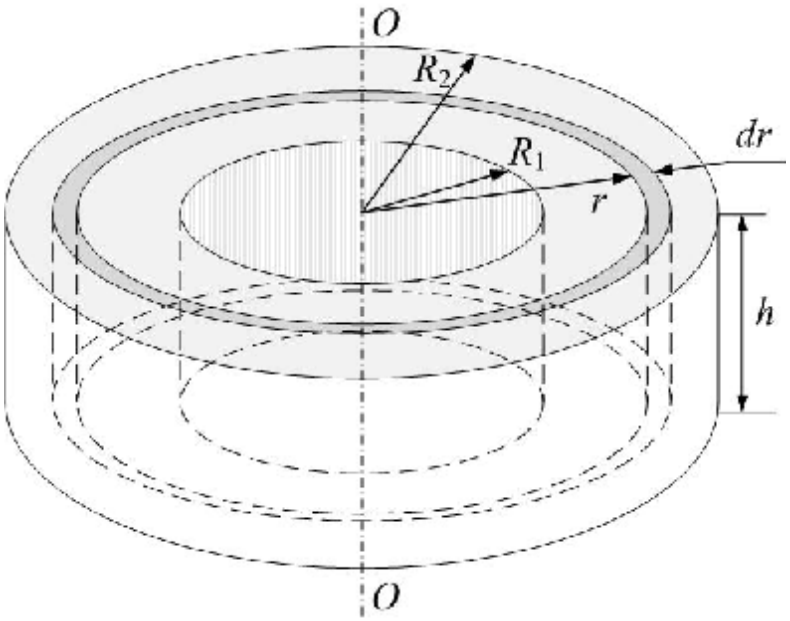

Рис.3.3.

Масса диска $m = \rho \cdot h \cdot S = \rho \cdot h \cdot \pi \cdot \left(R_2^2 - R_1^2 \right)$, тогда окончательно:

$$I = \frac{m\left(R_2^2 + R_1^2 \right)}{2}. \qquad (3.17)$$

2c. Сплошной цилиндр (диск).

В частном случае сплошного диска или цилиндра радиусом R подставим в (3.17) R_1=0, R_2=R и получим:

$$I = \frac{mR^2}{2}. \qquad (3.18)$$

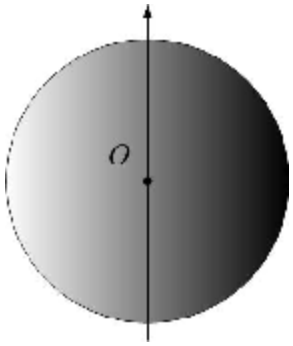

Рис.3.4

2d. Шар.

Момент инерции шара радиуса R и массой m относительно оси, проходящей через его центр (рис.3.4), равен (без доказательства):

$$I = \frac{2}{5}mR^2. \qquad (3.19)$$

2e. Момент инерции тонкого стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно стержню (рис.3.5).

Стержень разобьём на бесконечно малые участки длиной dr. Масса такого участка $dm = \frac{m}{l}dr$. Подставим в (3.14) и проинтегрируем от 0 до l:

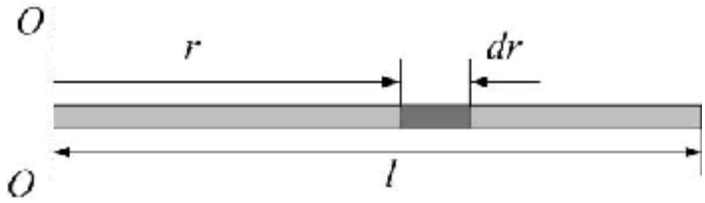

Рис.3.5

$$I = \int_m r^2 dm = \int_0^l r^2 \times \frac{m}{l}dr = \frac{m}{l}\int_0^l r^2 \times dr = \frac{m}{l} \times \left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^l = \frac{m}{l} \times \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3},$$

$$I = \frac{ml^2}{3}. \qquad (3.20)$$

Если ось проходит через центр стержня перпендикулярно ему, можно рассчитать момент инерции половины стержня по (3.20) и затем удвоить:

$$I_c = 2 \times \frac{\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)^2}{3} = \frac{ml^2}{12}. \qquad (3.21)$$

3. Теорема Штейнера

Если ось вращения *не проходит* через центр масс тела (рис.3.6), вычисления по формуле (3.14) могут быть довольно сложными. В этом случае расчет момента инерции облегчается применением ***теоремы Штейнера***: ***момент инерции тела***

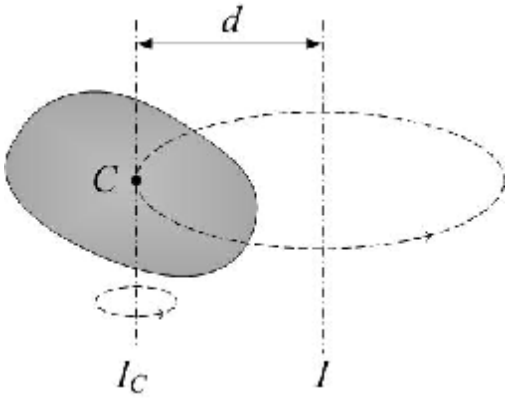

Рис.3.6

относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_c тела относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно данной оси, и произведения массы тела на квадрат расстояния d между осями :

$$I = I_c + m \times d^2 . \qquad (3.22)$$

Посмотрим, как работает теорема Штейнера, если применить её к стержню:

$$I = I_c + m \times d^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{ml^2}{3} = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 .$$

Нетрудно убедиться, что получилось тождество, поскольку в этом случае расстояние между осями равно половине длины стержня $d = \frac{l}{2}$.

4. Изменение момента импульса тела. Импульс момента силы. Закон сохранения момента импульса.

Из второго закона Ньютона для вращательного движения $\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$ и определения углового ускорения $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ следует:

$$\frac{\vec{M}}{I} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}dt = Id\vec{\omega} .$$

Если $I = const$, то $\vec{M}dt = d(I\vec{\omega})$. Введём момент импульса $\vec{L}$ твёрдого тела как

$$\vec{L} = I\vec{\omega}; \qquad (3.23)$$

тогда

$$\vec{M}dt = d\vec{L} . \qquad (3.24)$$

Соотношение (3.24) – это основной закон динамики твёрдого тела для вращательного движения. Его можно переписать так:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \qquad (3.24)$$

и тогда это будет аналог второго закона Ньютона для поступательного движения в импульсной форме (2.5)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} . \qquad (2.5)$$

Соотношение (3.24) можно проинтегрировать:

$$\vec{M}\Delta t = \Delta\vec{L} \qquad (3.25)$$

и сформулировать закон изменения момента импульса: ***изменение момента импульса тела равно импульсу суммарного момента внешних сил***. Величина $\vec{M}\Delta t$ называется импульсом момента силы и аналогична импульсу силы $\vec{F}\Delta t$ в формулировке второго закона Ньютона для поступательного движения (2.2) $\Delta\vec{p} = \vec{F} \times \Delta t$; момент импульса $\vec{L} = I\vec{\omega}$ является аналогом импульса $\vec{p} = m\vec{v}$.

Размерность момента импульса

$$[L] = \frac{кг \times м^2}{с}.$$

Момент импульса твёрдого тела относительно его оси вращения – это вектор, направленный по оси вращения по правилу буравчика.

Момент импульса материальной точки относительно точки О (рис.3.6) – это:

$$\vec{L} = [\vec{r}\,,\ \vec{p}], \qquad (3.26)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки, $\vec{p}$ – её импульс. Вектор момента импульса $\vec{L}$ направлен по правилу буравчика перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{p}$: на рис.3.7 – к нам из-за рисунка. Величина момента импульса

$$L = r \cdot p \cdot \sin\alpha = mvl.$$

Твёрдое тело, вращающееся относительно оси, разобьём на элементарные массы m_i и просуммируем по всему телу моменты импульса каждой массы (то же самое можно записать в виде интеграла; это непринципиально):

$$L = \sum_i L_i = \sum_i r_i \times m_i \times v_i = \sum_i r_i \times m_i \times (\omega \times r_i) = \omega \times \sum_i \left(m_i \times r_i^2\right) = \omega \times I.$$

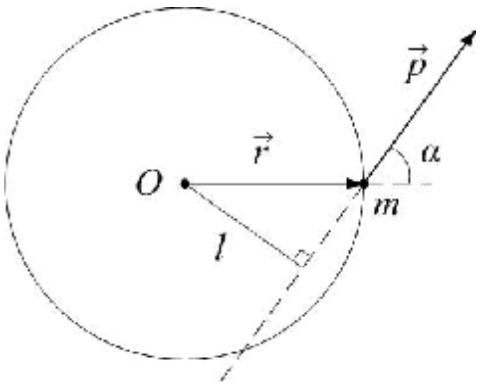

Рис.3.7

Поскольку угловая скорость всех точек одинакова и направлена по оси вращения, то можно записать в векторной форме:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \qquad (3.23)$$

Таким образом, доказана эквивалентность определений (3.23) и (3.26).

Если суммарный момент внешних сил равен нулю, то момент импульса системы не изменяется (см.3.25):

$\sum \vec{M}^{внешн.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const$. ***Это закон сохранения момента импульса***. Это возможно, когда:

а) система замкнута (или $\sum \vec{F}^{внешн.} = 0$);

б) у внешних сил нет касательных составляющих (вектор силы проходит через ось/центр вращения);

в) внешние силы параллельны закреплённой оси вращения.

Примеры использования/действия закона сохранения момента импульса:

1. гироскоп;

2. скамья Жуковского;
3. фигуристка на льду.

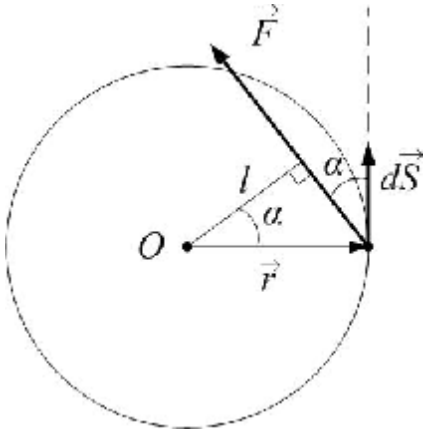

Рис.3.8

5. Работа при вращательном движении.

Пусть тело повернулось на угол $d\varphi$ под действием силы $\vec{F}$ и угол между перемещением $d\vec{S}$ и силой равен α; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы (рис.3.8), тогда работа силы равна:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F\cos\alpha \cdot dS = F\cos\alpha \cdot r \cdot d\varphi =$$

$$= F \cdot l \cdot d\varphi = M \cdot d\varphi$$

поскольку $dS = r \cdot d\varphi$ (1.22) и $M = F \cdot l$ (3.6).

Итак,

$$dA = M \cdot d\varphi \ , \qquad (3.24)$$

или

$$\Delta A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dA = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi \ . \qquad (3.25)$$

6. Кинетическая энергия вращения.

Пусть тело вращается относительно закреплённой оси с угловой скоростью ω. Разобьём его мысленно на элементарные массы m_i и просуммируем кинетические энергии:

$$W = \sum_i W_i = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \omega^2 \cdot r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \left(m_i \cdot r_i^2 \right) = \frac{I \cdot \omega^2}{2} .$$

Здесь воспользовались формулой связи угловой и линейной скорости $v = r \cdot \omega$ (1.23) и определением момента инерции твёрдого тела $I = \sum_i \left(\Delta m_i r_i^2 \right)$ (3.12). Итак, кинетическая энергия вращающегося тела равна:

$$W_{вращ} = \frac{I \cdot \omega^2}{2} . \qquad (3.26)$$

Если тело одновременно ещё и движется поступательно (например, тело катится), то полная кинетическая энергия его равна:

$$W_{кин.} = W_{пост.} + W_{вращ} = \frac{m \cdot v_c^2}{2} + \frac{I \cdot \omega^2}{2} ,$$

где v_c – скорость поступательного движения центра масс.

7. Сопоставление величин и законов для поступательного и вращательного движения.

Аналогия между поступательным и вращательным движениями (см. лекцию 1) продолжена в табл.2.1:

Таблица 2.1

Величина/закон	Поступательное движение	Вращательное движение
Перемещение	$\vec{S}$	$\vec{\varphi}$
Скорость	$\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt}$	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{S}}{dt^2}$	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$
Сила; момент силы	$\vec{F}$	$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]$ $M = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot l$
Масса; момент инерции	m	$I = \int_m r^2 dm;\ I = \sum_i (\Delta m_i r_i^2)$ $I = mr^2$ (для материальной точки) $I = I_c + m \cdot d^2$ – теорема Штейнера
Второй закон Ньютона	$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}$
Импульс; момент импульса	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	$\vec{L} = I\vec{\omega};\ \vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}]$
Второй закон Ньютона в импульсной форме	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Закон сохранения импульса; момента импульса	$\sum_k \vec{F}_k^{внеш.} = 0 \Rightarrow \sum_i \vec{p}_i = const$	$\sum \vec{M}^{внеш.} = 0 \Rightarrow \sum \vec{L} = const$
Работа	$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S}$	$dA = M \cdot d\varphi$
Кинетическая энергия	$W_{кин.} = \frac{mv^2}{2}$	$W_{вращ} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$