

Лекция 2 Динамика

Предисловие

Лекция получилась длинная, потому что включает материал, который, по определению, студент проходил ещё в школе, но как показывает опыт, чаще всего «проходил мимо». А знать этот материал надо.

План

1. Законы Ньютона: область применимости
2. Первый закон Ньютона. Инерциальные и неинерциальные системы отсчёта
3. Второй закон Ньютона. Импульс тела
4. Третий закон Ньютона. Закон сохранения импульса
5. Центр масс
6. Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея. Закон сложения скоростей в классической механике. Второй закон Ньютона для неинерциальных систем отсчёта
7. Виды сил
8. Закон всемирного тяготения. Сила тяжести. Вес тела
9. Сила трения
10. Силы упругости
11. Работа
12. Мощность
13. Энергия. Закон сохранения энергии
14. Кинетическая энергия
15. Потенциальная энергия в поле тяготения
16. Потенциальная энергия упругой деформации
17. Графическое представление энергии
18. Признак потенциальности поля. Консервативные силы. Диссипативные силы
19. Связь между консервативной силой и потенциальной энергией

1. *Законы Ньютона.* Динамика изучает взаимодействие тел и его влияние на механическое движение. В основе динамики лежат законы Ньютона (17-й век). Эти законы не доказываются; они являются обобщением большого количества опытных данных. В начале 20-го века появились опыты, не объяснимые законами Ньютона, и это привело к построению новых теорий – теории относительности (Эйнштейн) и квантовой механики (Шрёдингер, Планк, де Бройль, Гейзенберг). Создание новых теорий не означает, что Ньютоновская механика неверна. Новые теории включают классическую (Ньютоновскую) физику как частный, предельный, случай для малых скоростей $v \ll c$ и макротел. Развитие науки не перечеркнуло классическую механику, а показало лишь её ограниченную применимость.

2. *Первый закон Ньютона. Инерциальные и неинерциальные системы отсчёта.* Всякому телу свойственно сохранять состояние равномерного прямолинейного движения или покоя, пока и поскольку другие тела не вынудят его изменить это состояние. Указанное свойство тел называется инерцией, инертностью. Первый закон выполняется не во всех системах отсчёта, а только в инерциальных. Так что, по существу, первый закон постулирует существование инерциальных систем отсчёта, то есть таких, где выполняется закон инерции. По этому закону, существует хотя бы одна инерциальная система отсчёта, а следовательно, их бесконечное число: любая система отсчёта, движущаяся относительно инерциальной с постоянной скоростью ($\dot{\mathbf{v}} = \text{const}$), также является инерциальной. Неинерциальных систем отсчёта тоже бесконечно много: это – любая, движущаяся ускоренно относительно какой-либо инерциальной.

3. *Второй закон Ньютона. Импульс тела.* В результате взаимодействия с другими телами тело может получить ускорение $\dot{\mathbf{a}}$. Одинаковое по величине воздействие разным телам сообщает разные ускорения: чем больше инертность тела, тем меньше ускорение. Количественной мерой инертности тела является масса m . Размерность массы в системе единиц СИ – $[m] = \text{кг}$.

Сила – количественная мера воздействия одного тела на другое. Она характеризуется величиной, направлением и точкой приложения. Сила – вектор:

$\dot{\mathbf{F}}$. Размерность силы – ньютон: $[F] = \text{кг} \times \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}$. Формулировка второго закона

Ньютона: ускорение тела прямо пропорционально равнодействующей всех сил, приложенных к телу, и обратно пропорционально массе тела

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{\dot{\mathbf{F}}_k}{m}. \quad (2.1)$$

Напоминаем, что это – закон, полученный при обобщении опытных данных; он не доказывается. В числителе стоит равнодействующая всех сил, приложенных к телу, то есть их векторная сумма: $\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{F}}_k$; – её действие эквивалентно

совместному действию всех реально приложенных к телу сил.

Из (1.7) $\dot{\mathbf{a}} = \frac{d\dot{\mathbf{v}}}{dt}$ (см. лекцию 1) получим:

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d\dot{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{\dot{\mathbf{F}}}{m} \quad \Rightarrow \quad m \times d\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{F}} \times dt \quad \Rightarrow \quad d(m \times \dot{\mathbf{v}}) = \dot{\mathbf{F}} \times dt \quad \Rightarrow \quad d\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{F}} \times dt.$$

Из последнего равенства, интегрируя его, получим

$$D\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{F}} \times Dt. \quad (2.2)$$

Это – второй закон Ньютона в импульсной форме: изменение импульса тела равно импульсу действовавшей на тело силы. Напоминаем, что произведение

силы на промежуток времени, в течение которого она действовала, называется импульсом силы:

$$\dot{\vec{F}} \times Dt, \quad (2.3)$$

а произведение массы тела на его скорость – импульсом тела:

$$\dot{\vec{p}} = m \times \dot{\vec{v}}. \quad (2.4)$$

Второй закон Ньютона в виде (2.1) выполняется только при скоростях, много меньше скорости света; а в импульсной форме (2.5) его можно применять и при скоростях, сравнимых со скоростью света:

$$\frac{\vec{r}}{F} = \frac{d\dot{\vec{p}}}{dt}. \quad (2.5)$$

4. Третий закон Ньютона. Закон сохранения импульса.

Всякое действие тел друг на друга носит характер ВЗАИМОдействия. Если на первое тело (материальную точку) действует сила $\vec{F}_{12}$ со стороны второго, то на второе со стороны первого тоже действует сила $\vec{F}_{21}$, причём эти силы, с которыми тела действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению (рис.2.1):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.6)$$



Рис.2.1

Пусть система этих двух тел замкнута, то есть на них не действуют внешние силы. Тогда можно записать по второму закону Ньютона для каждого из тел:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}}_1 &= \vec{F}_{12} \times dt \\ \dot{\vec{p}}_2 &= \vec{F}_{21} \times dt \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) \times dt = 0 \times$$

Правая часть равна нулю, так как по третьему закону силы равны и противоположны. Отсюда получим, что полный импульс системы тел сохраняется, поскольку его изменение (дифференциал) равно нулю:

$$\dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = const.$$

Аналогичный вывод можно сделать для замкнутых систем с произвольным количеством тел, поскольку все взаимодействия – парные. Итак, закон сохранения импульса: в замкнутой системе полный импульс сохраняется. Полный импульс системы сохраняется даже в том случае, если внешние воздействия есть, но они скомпенсированы:

$$\text{Если } \sum_k \dot{\vec{F}}_k^{внеш.} = 0, \text{ то } \sum_i \dot{\vec{p}}_i = const.$$

Даже если равнодействующая внешних сил не равна нулю, но равна нулю её проекция на какую-либо ось, то проекция полного импульса на ту же ось сохраняется:

$$\text{Если } \sum_k \dot{F}_{kx}^{внеш.} = 0, \text{ то } \sum_i \dot{p}_{ix} = const.$$

Принцип реактивного движения основан на законе сохранения импульса. Получим формулу Циолковского. Пусть m – масса ракеты, v её скорость, u – скорость истечения отработанных газов относительно ракеты, dm – их масса. Приравняем суммарный импульс ракеты и газов до и после их истечения в инерциальной системе отсчёта (с учётом направления):

$$mv = dm \cdot (v - u) + (m - dm) \cdot (v + dv).$$

Здесь $(v - u)$ – скорость истечения газов в инерциальной системе отсчёта. Раскроем скобки и пренебрежём членами второго порядка малости:

$$0 = -u \cdot dm + m \cdot dv, \\ \frac{dm}{m} = \frac{dv}{u}.$$

Интегрируем:

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = \int_0^v \frac{dv}{u} \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{m}{m_0} = \frac{v}{u} \quad \Rightarrow \quad v = u \cdot \ln \frac{m}{m_0}.$$

Последнее выражение и есть формула Циолковского.

5. *Центр масс.* Рассмотрим любое тело или систему точечных масс.

Определение: центр масс – это точка, которая движется так, будто к ней приложены все внешние силы, и в ней сосредоточена вся масса системы (тела). Радиус-вектор центра масс равен

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m}, \quad (2.7)$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор массы m_i , $\sum_i m_i = m$ – масса всей системы. Если (2.7)

продифференцировать по времени, получим скорость центра масс:

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{v}_i, \quad \text{откуда импульс системы} \\ \mathbf{p} = m \mathbf{v}_c = \sum_i m_i \mathbf{v}_i. \quad (2.8)$$

Возьмём производную равенства (2.8): $m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$. Величина $\mathbf{a}_c = \frac{d\mathbf{v}_c}{dt}$

– ускорение центра масс. В правой части равенства величина $m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$ по второму

закону Ньютона равна равнодействующей сил, приложенных к i -той материальной точке. После суммирования по всем точкам получим равнодействующую всех внешних сил, приложенных к системе (сумма внутренних сил, действующих в системе, равна нулю по третьему закону Ньютона):

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{внеш}.$$

Тогда $m \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{внеш.}$, что и требовалось показать: центр масс движется так, будто к нему приложены все внешние силы.

6. *Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея. Закон сложения скоростей в классической механике. Второй закон Ньютона для неинерциальных систем отсчёта.*

Рассмотрим две инерциальные системы отсчёта К и К' (рис.2.2), оси которых параллельны друг другу, причём К' движется равномерно относительно К со скоростью $\vec{v}_0$ (переносная скорость). Радиус-вектор точки m в первой системе

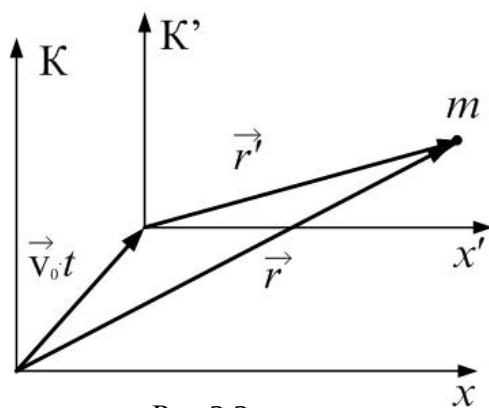


Рис.2.2

отсчёта равен $\vec{r}$, во второй – $\vec{r}'$. Пусть в начальный момент времени начала отсчёта систем совпадали. Тогда за время t начала отсчёта разошлись на вектор $\vec{v}_0 \cdot t$. Из рисунка

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 \cdot t. \quad (2.9)$$

Продифференцируем по времени равенство (2.9):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{v}_0 \cdot \frac{dt}{dt}.$$

Здесь $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ – скорость точки m системе К

(абсолютная скорость); $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ – скорость точки m в системе К' (относительная скорость). В итоге получили Галилеевский закон сложения скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0, \quad (2.10)$$

или $\vec{v}_{абс.} = \vec{v}_{отн.} + \vec{v}_{пер.}$.

Теперь продифференцируем (2.10), учтя, что $\vec{v}_0 = const$:

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + 0$, или $\vec{a} = \vec{a}'$. Ускорения точки в обеих системах отсчёта одинаковы, следовательно, уравнения движения, записанные по второму закону Ньютона, тоже одинаковы: $m\vec{a} = m\vec{a}' = \sum_i \vec{F}_i^{внеш.}$. Это и есть принцип относительности

Галилея: все инерциальные системы отсчёта эквивалентны. Или: законы динамики инвариантны относительно преобразований Галилея. Преобразования Галилея – это преобразования (2.9) координат точки при переходе от одной системы к другой. При $\vec{v}_0$ - ОХ преобразования выглядят так:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x' + v_0 \times t \\ \dot{y} &= y' \\ \dot{z} &= z' \\ \dot{t} &= t' \end{aligned} \quad (2.11)$$

Последнее равенство Галилей не включал в свои преобразования, ибо тогда любому было ясно, что время в разных системах отсчёта по-разному течёт просто не может. Эту очевидность потом разрушил Эйнштейн своей теорией относительности.

Рассмотрим теперь неинерциальную систему K' , которая движется относительно инерциальной K с ускорением $\dot{\mathbf{a}}_0 = \text{const}$. Уравнение движения в инерциальной системе K выглядит так: $m\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}} \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{внеш.}}$; в неинерциальной K'

нужно учесть силы инерции $\mathbf{F}_u = -m\dot{\mathbf{a}}_0$:

$$m\dot{\mathbf{a}}' = \dot{\mathbf{a}} \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{внеш.}} + \mathbf{F}_u = \dot{\mathbf{a}} \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{внеш.}} - m\dot{\mathbf{a}}_0.$$

Если $\dot{\mathbf{a}} \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{внеш.}} = 0$, то в системе K $\dot{\mathbf{a}} = 0$, а в K' ускорение точки $\dot{\mathbf{a}}' = -\dot{\mathbf{a}}_0$.

7. *Виды сил.* В природе существует 4 вида фундаментальных взаимодействий:

1. Гравитационное
2. Электромагнитное
3. Сильное (ядерные силы)
4. Слабое (превращения элементарных частиц – β -распад, например).

Все виды сил (трения, упругости, вязкости, поверхностного натяжения и т.д.) – это проявления фундаментальных взаимодействий.

8. *Закон всемирного тяготения. Сила тяжести. Вес тела.* Две материальные точки притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной каждой массе и обратно пропорциональной квадрату расстояния между точками:

$$F_{\text{тяг.}} = g \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.12)$$

где $g = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравитационная постоянная.

Любая масса создаёт в окружающем пространстве гравитационное поле. Поле – это пространство с особым свойством: если в гравитационное поле поместить другую массу, то на неё со стороны поля будет действовать сила. Две массы взаимодействуют посредством гравитационного поля. Для гравитационных полей, как и для любых полей, характерно близкое действие, то есть

гравитационное взаимодействие распространяется с конечной скоростью, равной скорости света в вакууме $C = 3 \times 10^8 \frac{M}{c}$.

Введём понятие напряжённости гравитационного поля. По определению, напряжённость гравитационного поля – это сила, действующая в данной точке поля на точечную единичную массу:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.13)$$

Вблизи Земли (или другого небесного тела) с массой M , радиусом R тело массой m притягивается к ней с силой:

$$F_{тяг.} = g \frac{M \cdot m}{r^2} = g \frac{M \cdot m}{(R + h)^2}, \quad (2.14)$$

где h – высота над поверхностью Земли. Это – сила тяжести:

$$F_{тяж.} = mg = g \frac{M \cdot m}{(R + h)^2}. \quad (2.14a)$$

Из (2.13) и (2.14a) получим, что напряжённость гравитационного поля совпадает с ускорением свободного падения: $\vec{G} = \vec{g}$.

Величина ускорения свободного падения

$$g(h) = g \frac{M}{(R + h)^2},$$

а на поверхности Земли

$$g = g(0) = g \frac{M}{R^2}. \quad (2.15)$$

Вес тела $\vec{P}$ – это сила, с которой тело давит на подставку или растягивает подвес. Вес – сила, приложенная к подставке. Вес по третьему закону Ньютона равен и противоположен силе нормального давления $\vec{N}$ (или натяжения нити): $\vec{P} = -\vec{N}$. Если тело неподвижно висит или лежит (или вместе с подставкой движется равномерно, – система отсчёта инерциальна), то по второму закону Ньютона, сумма сил, действующих на тело, то есть тяжести и нормального давления,

будет равна нулю (ускорение отсутствует): $\vec{F}_{тяж.} + \vec{N} = 0$. Тогда вес $\vec{P} = -\vec{N} = \vec{F}_{тяж.}$.

Если тело движется ускоренно ($\vec{a} \neq 0$) вместе с подставкой, то уравнение движения примет вид $\vec{F}_{тяж.} + \vec{N} = m\vec{a}$, и вес

$$\vec{P} = -\vec{N} = -(m\vec{a} - \vec{F}_{тяж.}) = \vec{F}_{тяж.} - m\vec{a} = m\vec{g} - m\vec{a}.$$

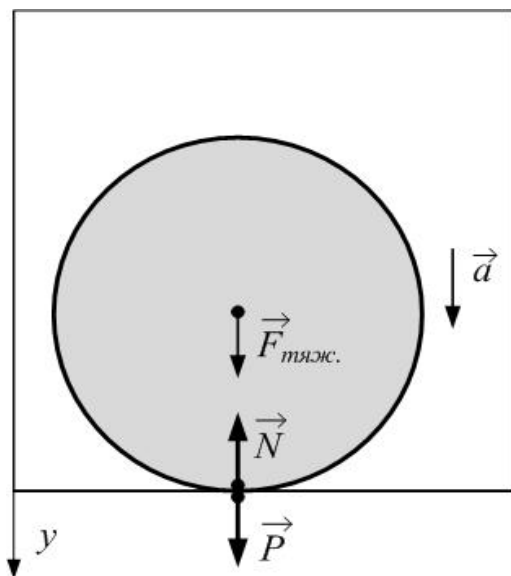


Рис.2.3

Если, например, тело вместе с лифтом движется ускоренно вверх (рис.2.3), то в проекциях на ось ОУ

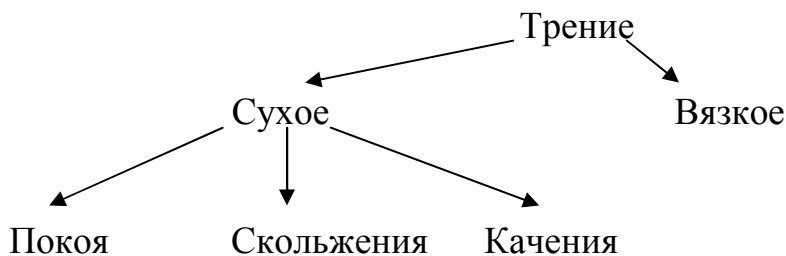
$$P = m(g + a). \quad (2.15)$$

Если ускорение направлено вниз, то вес

$$P = m(g - a). \quad (2.16)$$

При $a = g$ наступает невесомость: $P = m(g - a) = 0$.

9. *Сила трения.* Сила трения возникает при относительном перемещении соприкасающихся тел (или частей одного тела).



Будем рассматривать только сухое трение покоя и скольжения. Сила трения скольжения зависит от того, с какой силой прижаты тела друг к другу (силы нормального давления $\vec{N}$):

$$F_{тр.} = mN. \quad (2.17)$$

Здесь m – коэффициент трения; он безразмерен; его величина не может быть больше единицы. Считаем, что в первом приближении сила трения скольжения не зависит от скорости.

Сила трения покоя возникает при попытках переместить соприкасающиеся тела относительно друг друга; она может принимать любые значения от 0 до mN :

$$0 \leq F_{тр.покоя} \leq mN.$$

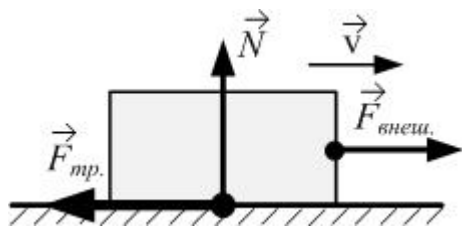


Рис.2.4

Сила трения направлена по касательной с соприкасающимися поверхностями (рис.2.4).

Причины возникновения сил трения – неровности, шероховатости поверхностей тел: при относительном перемещении неровности зацепляются, ломаются; при этом тратится энергия – тела нагреваются. Ещё одна причина – межмолекулярное (межатомное) взаимодействие: при соприкосновении молекулы двух тел притягиваются. В конечном итоге трение – проявление электромагнитного взаимодействия.

10. *Силы упругости.* Причины возникновения сил упругости – также межмолекулярные взаимодействия и сводятся к электромагнитным силам: при

изменении длины тела (например, при растяжении) увеличиваются средние межмолекулярные расстояния, в результате чего возникают силы притяжения между молекулами, и тело стремится вернуться к первоначальным размерам. Деформация тела называется упругой, если после снятия нагрузки тело возвращается к первоначальным размерам и форме. Строго говоря, остаточная деформация есть всегда, но если она мала, ею пренебрегают. При неупругой деформации происходит разрыв некоторых межмолекулярных связей и образование связей между другими молекулами, в результате чего изменённая форма тела сохраняется и после снятия нагрузки.

Любая деформация может быть представлена как сочетание двух основных: растяжения (сжатия) и сдвига. Рассмотрим сначала деформацию растяжения стержня (рис.2.5). При малых деформациях изменение длины тела, то есть абсолютная деформация $\Delta l = l - l_0$, прямо пропорциональна приложенной силе – это закон Гука:

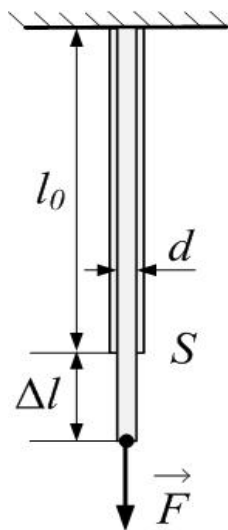


Рис.2.5

$$F = k \Delta l, \quad (2.18)$$

здесь k – жёсткость. Механическое нормальное напряжение – это сила, приходящаяся на единицу площади сечения тела (считаем силу приложенной перпендикулярно сечению S):

$$s = \frac{F}{S}. \quad (2.19)$$

Механическое напряжение – локальная характеристика; в разных точках сечения оно, вообще говоря, различно, поэтому лучше использовать определение (2.19а):

$$s = \frac{dF}{dS}. \quad (2.19a)$$

Размерность $[s] = \frac{H}{m^2} = Па$. Закон Гука в локальной

форме:

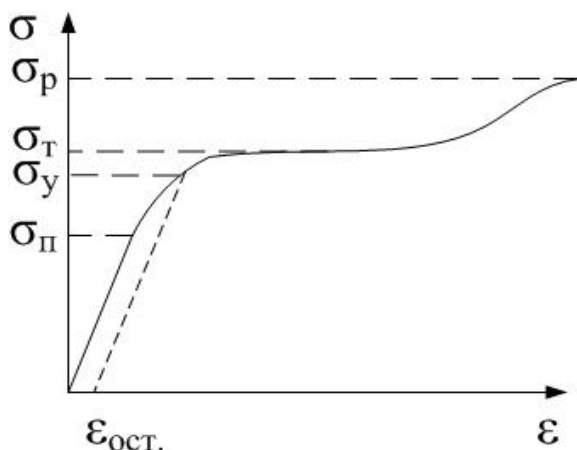
$$s = E e_{\parallel}, \quad (2.20)$$

где $e_{\parallel}$ (или просто e) – относительная продольная деформация:

$$e_{\parallel} = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.21)$$

Она безразмерна: $[e] = 1$. Величина E – это модуль Юнга материала и характеризует упругие свойства этого материала; не зависит от размеров и формы образца, в отличие от жёсткости k :

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{s \cdot S}{e_{\parallel} \cdot l} = E \times \frac{S}{l}.$$



Экспериментальная зависимость механического напряжения от относительной продольной деформации

дана на рис.2.6. Там же указаны характерные точки – пределы: пропорциональности $S_{\text{п}}$, упругости $S_{\text{у}}$, текучести $S_{\text{т}}$ и прочности $S_{\text{р}}$. Предел пропорциональности $S_{\text{п}}$ – это максимальное механическое напряжение, при котором ещё выполняется закон Гука (деформацию можно считать пропорциональной напряжению). Предел упругости $S_{\text{у}}$ – такое максимальное напряжение, при котором деформацию можно считать упругой. Если напряжение превысит этот предел, после снятия нагрузки будет остаточная деформация. Предел текучести $S_{\text{т}}$ – это механическое напряжение, при котором деформация увеличивается почти без увеличения нагрузки. Горизонталь на графике – это область пластичности. Если тело пластично, этот участок длинный (сталь), если горизонтальный участок мал – тело хрупкое (чугун). Предел прочности $S_{\text{р}}$ – это напряжение, при котором начинается разрушение тела.

При деформации (удлинении) тела изменяется (уменьшается) сечение, и вообще говоря, изменяется объём. Относительное поперечное сжатие – это

$$e_{\perp} = \frac{\Delta d}{d}. \quad (2.22)$$

При односторонней деформации величины $e_{\perp}$ и $e_{\parallel}$ имеют противоположные знаки: при растяжении сечение уменьшается. Отношение этих величин – коэффициент Пуассона материала:

$$K_{\text{п}} \text{ или } \mu = - \frac{e_{\perp}}{e_{\parallel}}. \quad (2.23)$$

Можно доказать, что коэффициент Пуассона материалов, сохраняющих объём при деформациях, равен $K_{\text{п}} = 0.5$.

При деформации сдвига под действием касательной силы все слои тела

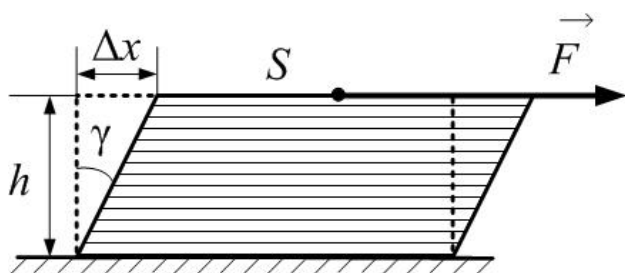


Рис.2.7

перемещаются параллельно друг другу в направлении действия силы (рис.2.7). Абсолютный сдвиг – это Δx ; относительный сдвиг – это угол сдвига γ ; он мал, поэтому

$$\gamma = \frac{\Delta x}{h}, \quad (2.24)$$

где h – высота тела. Закон Гука для деформации сдвига имеет вид:

$$\tau = G \gamma. \quad (2.25)$$

Здесь $\tau = \frac{dF}{dS}$ – тангенциальное (касательное) механическое напряжение; G – модуль сдвига, связанный с модулем Юнга соотношением

$$G = \frac{E}{2(1 + K_{\text{п}})}. \quad (2.26)$$

11. *Работа.* Пусть тело движется прямолинейно под действием постоянной силы $\vec{F}$ и совершает прямолинейное перемещение $d\vec{S}$ (рис.2.8).

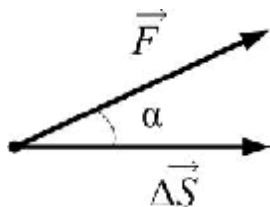


Рис.2.8

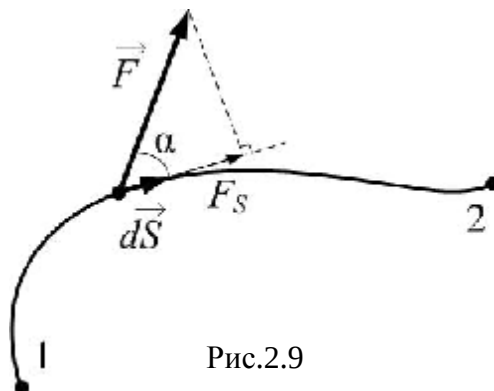


Рис.2.9

Тогда по определению работой силы будет называться скалярное произведение этих векторов:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F \cdot dS \cdot \cos \alpha, \quad (2.27)$$

где α – угол между векторами. (При $\alpha > 90^\circ$ работа $dA < 0$.) Размерность работы $[A] = H \cdot m = Дж$.

Если сила непостоянна и/или траектория криволинейна, тогда разбиваем траекторию на почти прямолинейные участки (элементарные перемещения) $d\vec{S}$, такие малые, что на каждом $\vec{F} = const$ (рис.2.9). Тогда работу на каждом участке можно рассчитать по определению (2.27), а потом сложить (проинтегрировать) от начальной точки 1 до конечной 2:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F \cdot dS \cdot \cos \alpha = F_s \cdot dS; \quad (2.28)$$

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_1^2 F \cdot \cos \alpha \cdot dS = \int_1^2 F_s \cdot dS. \quad (2.29)$$

Если известна зависимость касательной составляющей силы $F_s = f(S)$, то работу можно представить графически как площадь под графиком в соответствующих пределах (рис.2.10).

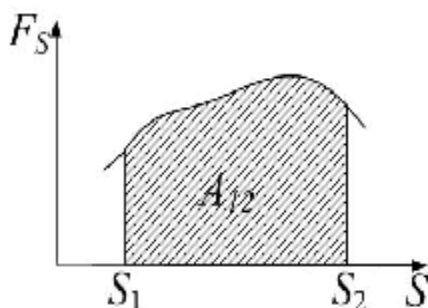


Рис.2.10

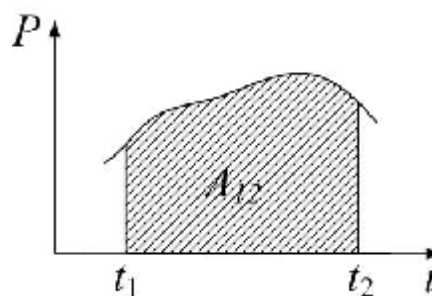


Рис.2.11

12. Мощность. Мощность – быстрота совершения работы. Средняя мощность – работа за единицу времени:

$$P_{cp.} = \frac{DA}{Dt}. \quad (2.30)$$

Размерность $[P] = \frac{Дж}{с} = Вт$ (Ватт). Мгновенная мощность:

$$P = \frac{dA}{dt}. \quad (2.31)$$

Из (2.31):

$$dA = P \times dt \quad \Rightarrow \quad A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 P \times dt,$$

Откуда также следует графическое представление (рис.2.11). Ещё одно полезное соотношение для мощности:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\dot{\mathbf{F}} \times d\dot{\mathbf{S}}}{dt} = \dot{\mathbf{F}} \times \frac{d\dot{\mathbf{S}}}{dt} = \dot{\mathbf{F}} \times \dot{\mathbf{v}}. \quad (2.32)$$

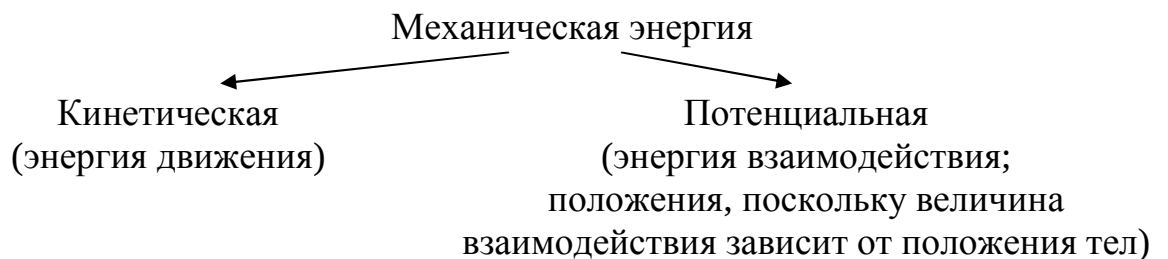
13. Энергия. Закон сохранения энергии. Энергия – мера взаимодействия и движения всех видов материи. Энергия характеризует состояние тела (системы). Энергия – функция состояния, то есть однозначно определяется состоянием системы. Изменить энергию системы можно, совершив над системой работу. Введём энергию как физическую величину, изменение которой равно работе внешних сил над системой (Для энергии можно использовать обозначение E или W):

$$DW = W_2 - W_1 = A_{\text{внешн.сил}}; \quad (2.33)$$

или:

$$W_1 = W_2 + A, \quad (2.34)$$

где $A = -A_{\text{внешн.сил}}$ – работа системы против внешних сил. В этих соотношениях W – полная энергия системы, то есть сумма всех видов энергии. Размерность энергии совпадает с размерностью работы: $[W] = [A] = Дж$. Соотношения (2.33) и (2.34) дают закон сохранения энергии: полная энергия замкнутой системы сохраняется (над замкнутой системой не совершается работа: внешних сил нет). Выражение (2.33) даёт только изменение энергии – важно только это в реальных процессах; начало отсчёта энергии можно задавать произвольно.



14. *Кинетическая энергия.* Пусть под действием внешней силы $\vec{F}$ скорость тела изменяется от $\vec{v}_1$ до $\vec{v}_2$. Найдём работу силы; она даст изменение кинетической энергии:

$$\begin{aligned} DW = W_2 - W_1 &= A_{\text{внешн.сил}} = \int_1^2 \vec{F} \times d\vec{S} = \int_1^2 m \vec{a} \times d\vec{S} = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \times d\vec{S} = \\ &= \int_1^2 m \frac{d\vec{S}}{dt} \times d\vec{v} = \int_{v_1}^{v_2} m \vec{v} \times d\vec{v} = \frac{m \times v_2^2}{2} - \frac{m \times v_1^2}{2} \end{aligned}$$

Отсюда можно сделать вывод, что кинетическая энергия $W_{\text{кин.}} = \frac{mv^2}{2} + \text{const}$; удобно положить, что $\text{const} = 0$; тогда окончательно

$$W_{\text{кин.}} = \frac{mv^2}{2}. \quad (2.45)$$

15. *Потенциальная энергия в поле тяготения.*

а) Однородное поле.

Поднимаем тело вверх в однородном гравитационном поле (рис.2.12); работа идёт на увеличение потенциальной энергии:

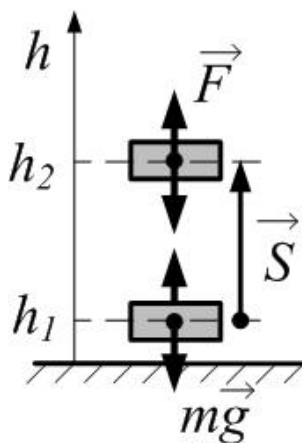


Рис.2.12

$$\begin{aligned} DW = W_2 - W_1 &= A_{\text{внешн.сил}} = \int_1^2 \vec{F} \times d\vec{S} = \int_1^2 \vec{F} \times d\vec{S} = \\ &= F \int_1^{h_2} dh = mg \times (h_2 - h_1); \end{aligned}$$

откуда потенциальная энергия

$$W_{\text{пот.}} = mgh. \quad (2.46)$$

Рассмотрим свободное падение тела без начальной скорости. Система Земля-тело замкнута. Полная начальная энергия тела на высоте h равна потенциальной (скорость отсутствует):

$$W_1 = mgh.$$

При подлёте к Земле тело набрало скорость, которую можно рассчитать из формулы пути при равноускоренном движении:

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad \text{и} \quad v^2 = 2aS = 2gh.$$

Кинетическая (и полная тоже) энергия в конце полёта

$$W_2 = \frac{mv^2}{2} = \frac{m \times 2gh}{2} = mgh.$$

Полная энергия сохраняется.

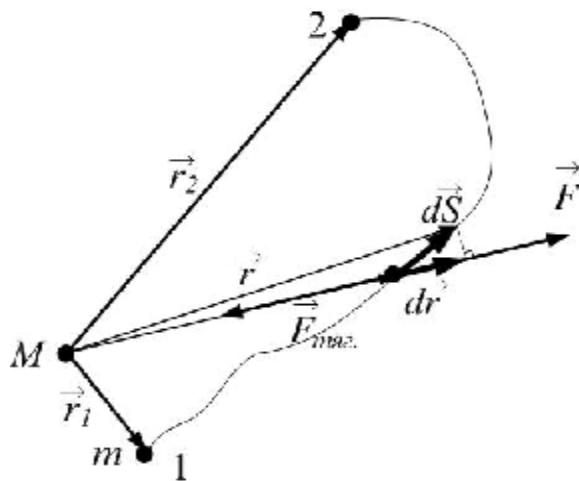


Рис.2.13

б) Центральное поле тяготения

Найдём работу в центральном поле тяготения и получим выражение для потенциальной энергии. Тело массой m перемещается в центральном поле, созданном массой M из положения 1 в положение 2. Внешняя сила $\vec{F}$ совершает работу, которая идёт на увеличение только потенциальной энергии при условии, что скорость (кинетическая энергия) остаётся неизменной. Поэтому перемещение происходит очень медленно, без ускорения; так что в любой точке траектории $\vec{F} = -\vec{F}_{тяг.}$.

$$DW = W_2 - W_1 = -A_{гравит.сил} = A_{внешн.сил} = \int_1^2 \vec{F} \times d\vec{S} = \int_1^2 \vec{F} \times d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F \times dr =$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} g \frac{M \times m}{r^2} \times dr = -g \frac{M \times m}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \left[-g \frac{M \times m}{r_2} \right] - \left[-g \frac{M \times m}{r_1} \right]$$

Отсюда можно сделать следующие выводы:

1. Сравнивая начало и конец цепочки равенств, получим выражение для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия точечных масс:

$$W_{ном.} = -g \frac{M \times m}{r}. \quad (2.47)$$

Начало отсчёта энергии задаётся из соображений, что при $r \rightarrow \infty$ массы не взаимодействуют, и $W = 0$.

2. Работа сил гравитационного поля не зависит от формы пути, а только от начального и конечного положения точки. Такие поля называются потенциальными.

3. Введём понятие потенциала гравитационного поля: Потенциал поля численно равен потенциальной энергии единичной массы, помещённой в данную точку поля:

$$j = \frac{W_{ном.}}{m}. \quad (2.48)$$

Потенциал – энергетическая скалярная характеристика поля. Его размерность $[j] = \frac{Дж}{кг}$. Из (2.47) и (2.48) получим потенциал поля, созданного точечной массой M на расстоянии r :

$$j = -g \frac{M}{r}. \quad (2.49)$$

16. *Потенциальная энергия упругой деформации.*

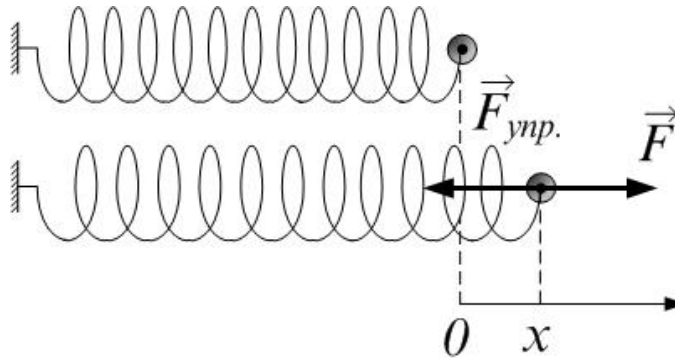


Рис.2.14

$$F_{\text{внеш.}} = -F_{\text{упр.}} = kx$$

$$A_{\text{внешн.сил}} = \int_0^x F_{\text{внеш.}} dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} - 0 = \Delta W_{\text{пот.}} = W_{\text{пот.}} - 0$$

Итак,

$$W_{\text{пот.}} = \frac{kx^2}{2}. \quad (2.50)$$

17. *Графическое представление энергии.*

На рисунках 2.15 и 2.16 дано графическое представление потенциальной энергии в однородном поле силы тяжести и энергии упругой деформации соответственно. Полная энергия в замкнутой системе остаётся постоянной:

$$W_{\text{полная}} = W_{\text{пот.}} + W_{\text{кин.}},$$

то есть

$$mgh_{\text{max}} = mgh + W_{\text{кин.}}; \quad \frac{kx_{\text{max}}^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + W_{\text{кин.}}$$

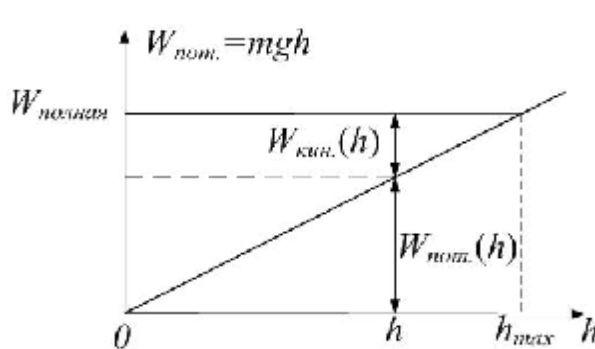


Рис.2.15

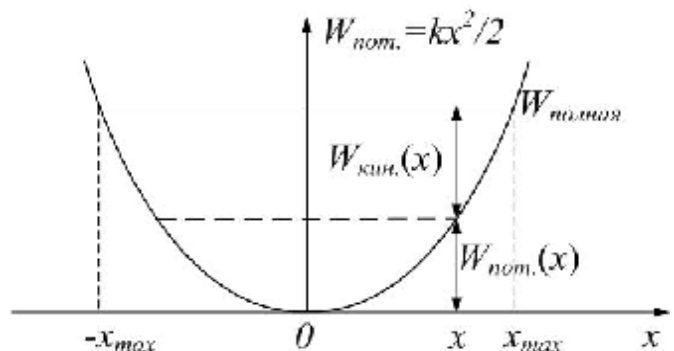


Рис.2.16

18. Признак потенциальности поля. Консервативные силы. Диссипативные силы.

Сила называется консервативной, если её работа не зависит от траектории, а только от начального и конечного положения тела. Поле таких сил называется потенциальным. Примеры: гравитационное поле; поле упругих сил.

Если работа силы зависит от траектории, то силы называются диссипативными, а поле таких сил – непотенциальным. Примеры: силы трения; силы вязкости; силы неупругой деформации.

При наличии диссипативных сил механическая энергия необратимо превращается в другие виды, например, в тепловую.

Закон сохранения (изменения) механической энергии системы при её переходе из состояния 1 в состояние 2 в этом случае можно записать так:

$$W_{1\text{мех.}} = W_{2\text{мех.}} + A_{\text{против диссипативных сил}} + A_{\text{против внешних сил}}. \quad (2.51)$$

В замкнутой системе механическая энергия сохраняется, если нет диссипативных сил, только консервативные.

19. Связь между консервативной силой и потенциальной энергией.

Система совершает работу за счёт уменьшения своей потенциальной энергии:

$$dA = - dW_{\text{ном.}} \quad (2.52)$$

По определению:

$$dA = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.53)$$

Тогда

$$\dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{r} = - dW_{\text{ном.}}$$

Отсюда можно выразить силу:

$$\dot{\mathbf{F}} = - \text{grad} W_{\text{ном.}}. \quad (2.54)$$

Здесь градиент – это вектор, компоненты которого равны производным по соответствующим координатам:

$$\text{grad} W_{\text{ном.}} = \frac{\partial W_{\text{ном.}}}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial W_{\text{ном.}}}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial W_{\text{ном.}}}{\partial z} \mathbf{k};$$

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ – единичные векторы, направленные по соответствующим осям:

$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$ (см. рис.2.17). В проекции на ось OX:

$$F_x = - \frac{\partial W_{\text{ном.}}}{\partial x}. \quad (2.55)$$

Пример:

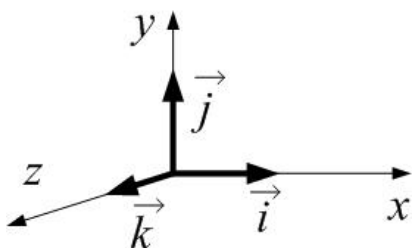


Рис.2.17

$$W_{nom.} = \frac{kx^2}{2} \quad \text{и} \quad F_{ynp.} = - \frac{dW_{nom.}}{dx} = - kx.$$

В равновесном положении сила равна нулю:

$$F = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dW_{nom.}}{dx} = 0,$$

энергия принимает экстремальные значения. В случае минимума равновесие устойчиво: при небольших отклонениях от равновесия возникают силы, возвращающие тело к положению равновесия; в случае максимума – неустойчиво: при отклонениях от равновесного состояния возникают силы, направленные от равновесного положения (рис. 2.18).

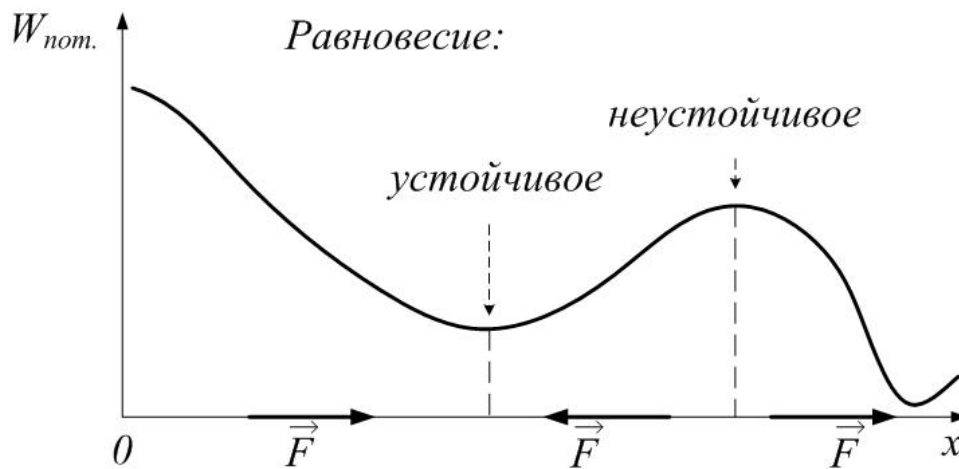


Рис.2.18