Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Вологодский государственный университет

ЭЛЕКТРОСТАТИКА, ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК, ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Курс лекций по физике

Часть 2

Учебное пособие

Вологда

2014

УДК 53

Электростатика, электрический ток, электромагнетизм. Курс лекций по физике. Часть 2: учебное пособие. – Вологда: ВоГУ, 2014. – 139 с.

Учебное пособие представляет собой конспект лекций по физике для студентов ВоГУ. Пособие состоит из трёх частей и охватывает все темы курса физики. Вторая часть содержит темы: электростатика, электрический ток и электромагнетизм. Материал представлен в объёме, минимально необходимом как для студента-бакалавра, так и специалиста, в соответствии с рабочими программами технических специальностей (направлений) с трёхсеместровым курсом физики. Пособие дополняет содержание лекций, читаемых в аудитории, что особенно важно при недостатке аудиторного времени.

Пособие может быть использовано при самостоятельной работе студентов как при подготовке к экзаменам и зачётам, так и при решении задач и тестов.

Особое внимание при создании пособия было уделено ясности и логичности изложения, подробным математическим выводам, что делает материал понятным и доступным даже для студентов с недостаточной школьной подготовкой. Пособие включает также много иллюстраций, облегчающих понимание текста.

Утверждено редакционно-издательским советом ВоГУ

Составитель: Л.А.Кузина, канд. физ.-мат.наук, доцент

Рецензенты: В.А.Горбунов, доктор физ.-мат. наук, профессор ВоГУ

Г.В. Гусакова, канд. физ.-мат. наук, профессор ВГМХА

СОДЕРЖАНИЕ

Лекция 1 (10) Электростатика……..……..4
Лекция 2 (11) Работа в электростатическом поле. Потенциал. Связь между напряженностью и потенциалом……..……17
Лекция 3 (12) Поляризация диэлектриков. Проводники. Электроемкость….27
Лекция 4 (13) Электрический ток …….…….……..…...44
Лекция 5 (14) Магнитное поле ……...….62
Лекция 6 (15) Магнитное поле в веществе……..…81
Лекция 7 (16) Электромагнитная индукция. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля……..……....97
Лекция 8 (17) Переходные процессы в электрических цепях. Электромагнитные колебания и волны ……..…112
Библиографический список…….……...…139

Лекция 1 (10)

Электростатика

План

1. Предисловие. Закон сохранения заряда
2. Взаимодействие электрических зарядов в вакууме. Закон Кулона
3. Электростатическое поле. Напряжённость поля. Принцип суперпозиции
4. Поток вектора напряжённости. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме
5. Применение теоремы Гаусса
   - 5.1. Поле бесконечной равномерно заряженной нити (цилиндра)
   - 5.2. Поле сферы, равномерно заряженной по объёму
   - 5.3. Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости
   - 5.4. Поле двух параллельных бесконечных равномерно заряженных плоскостей

1. Предисловие. Закон сохранения заряда

Тела при трении способны электризоваться. Этот опытный факт был замечен очень давно, а описан впервые древнегреческим философом Фалесом Милетским более двух тысяч лет назад. Наэлектризованные тела могут притягивать к себе другие тела: расчёска при трении о волосы приобретает способность притягивать к себе мелкие предметы. Кому случалось гладить кошку в темноте, тот видел проскакивающие при этом искры. Молния во время грозы – та же искра, только масштаб другой.

Установлено, что в природе существует два сорта электрических зарядов; их назвали положительными и отрицательными. Условились считать, что эбонитовая палочка, потёртая о мех, заряжается отрицательно, а стеклянная палочка, потёртая о шёлк, заряжается положительно. Одноимённо заряженные тела отталкиваются; разноимённо – притягиваются.

Закон сохранения заряда – один из фундаментальнейших законов природы – был установлен ещё в 18 веке, задолго до открытия электрона и других элементарных частиц. Именно частицы – носители заряда. Электрон имеет отрицательный заряд, по величине равный элементарному $e \approx 1.6 \cdot 10^{-19}\,Кл$: $q_{e^-} = -e$, заряд протона положителен и тоже равен элементарному: $q_p = +e$. Многие элементарные частицы обладают электрическим зарядом; это – их неотъемлемое свойство, как, например, масса или момент импульса (спин), причём заряд частиц кратен элементарному: $q = N \cdot e$, где N – целое число. Частиц с дробными зарядами в свободном состоянии не бывает.

В электрически нейтральных телах суммарный положительный заряд всех протонов в ядрах атомов нейтрализуется суммарным отрицательным зарядом электронов. При трении двух тел электроны одного тела переходят на другое; при этом первое тело заряжается положительно (там недостаёт электронов), а второе – отрицательно (оно несёт избыточные электроны). Собственно трение

несущественно и способствует лишь более плотному соприкосновению двух тел. Электроны с одного тела переходят на другое и при простом соприкосновении. Причина этого – различие работы выхода электронов из данного вещества: электроны переходят из вещества с меньшей работой выхода к телу с большей работой выхода.

Сформулируем закон сохранения заряда:

В замкнутой (точнее, электрически изолированной, то есть не обменивающейся зарядами с окружающей средой) **системе алгебраическая сумма электрических зарядов сохраняется:**

$$\sum_i q_i = const\,. \tag{10.1}$$

Заряд тела (системы тел) **не зависит от выбора системы отсчёта.** Этим замечательным свойством не обладают такие сохраняющиеся величины, как, например, импульс или энергия.

Закон сохранения заряда не означает, что заряды не могут исчезать или рождаться вновь; однако рождение или исчезновение зарядов всегда происходит парами: положительный и эквивалентный отрицательный. В качестве примера приведём две реакции: аннигиляция электрона и позитрона при столкновении (10.2) и рождение электронно-позитронной пары из фотона в силовом поле ядра X (10.3):

$$e^- + e^+ \to 2\gamma \tag{10.2}$$

$$\gamma + X \to e^- + e^+ + X \tag{10.3}$$

2. Взаимодействие электрических зарядов в вакууме. Закон Кулона

Точечным зарядом называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием до других тел.

Именно для точечных зарядов справедлив **<u>закон Кулона:</u> сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов в вакууме прямо пропорциональна величине каждого заряда и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:**

$$F = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2} \tag{10.4}$$

Коэффициент пропорциональности в законе Кулона равен

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot 10^9\,\frac{Н\cdot м^2}{Кл} = 9\cdot 10^9\,\frac{м}{Ф};$$

константа $\varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}\,\frac{Ф}{м}$ называется электрической постоянной. Тогда

$$F = \frac{|q_1|\cdot|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\cdot r^2}\,. \tag{10.4а}$$

<u>Замечание 1</u>: о системах единиц. Размерность заряда в системе единиц СИ – это кулон:

$$[q] = Кл\ .$$

Кулон – производная единица; он выражается через основные единицы – ампер и секунду: $Кл = A \cdot c$. В системе единиц CGSE (по-русски СГСЭ; основными единицами в ней являются *см*, *г*, *с*) соотношение между единицами:

$$1Кл = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ - ед.заряда}\ .$$

Система CGSE для электродинамических величин специально построена так, чтобы коэффициент $k = 1$, и закон Кулона этой системе единиц имеет вид:

$$F = \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}\ .$$

В дальнейшем будет использоваться только система СИ.

Закон Кулона можно записать в векторном виде (10.5)

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r_{12}^3}\vec{r}_{12}\ , \qquad (10.5)$$

где $\vec{r}_{12}$ – радиус-вектор, проведённый от заряда q_1 к заряду q_2, а $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на q_2 со стороны заряда q_1 (рис.10.1).

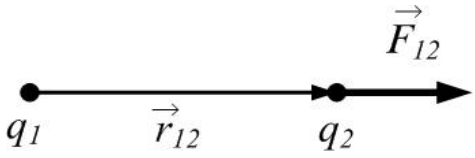


Рис.10.1

Закон Кулона в виде (10.5) описывает не только величину силы, но и её направление: если заряды имеют одинаковый знак, то $\vec{F}_{12}$ – сила отталкивания (как на рис.10.1), а если заряды разноимённые, то заряды притягиваются, и векторы $\vec{r}_{12}$ и $\vec{F}_{12}$ имеют противоположное направление.

Кулоновские силы – центральные: сила направлена вдоль прямой, соединяющей точечные заряды.

Силы независимы; их можно складывать. То есть, сила $\vec{F}_1$ взаимодействия двух точечных зарядов q и q_1 не изменится, если рядом поместить третий заряд q_2 (рис.10.2). Иначе: сила, действующая на данный заряд со стороны системы точечных зарядов, равна векторной сумме сил, действующих на данный заряд со стороны каждого заряда системы:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i\ . \qquad (10.6)$$

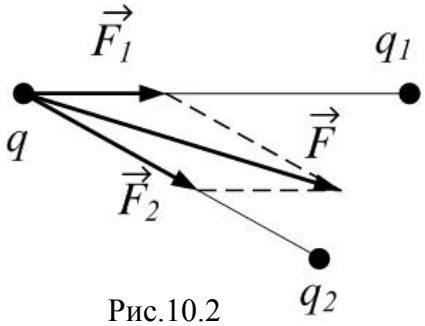


Рис.10.2

<u>Замечание 2</u>: о теориях дальнодействия и близкодействия. Исторически первой появилась теория дальнодействия, в соответствии с которой считают, что заряды взаимодействуют мгновенно и непосредственно, без участия какого-либо носителя. Взаимодействие распространяется мгновенно. В действительности это не так: любые взаимодействия могут распространяться только с конечной (хотя и очень большой) скоростью – это скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$. По теории

близкодействия, ***заряды взаимодействуют посредством полей; взаимодействие передаётся с помощью материального посредника – поля***. На данный заряд действует поле, созданное другим зарядом.

В этой и следующей лекциях будут рассматриваться только поля неподвижных или медленно движущихся зарядов – электроСТАТИЧЕСКИЕ поля. Если заряды движутся, то, кроме электрического поля, возникает также и магнитное; точнее, ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ поле.

3. Электростатическое поле. Напряжённость поля. Принцип суперпозиции

Заряды взаимодействуют друг с другом посредством электростатического поля. Любой заряд создаёт в окружающем пространстве электростатическое поле. Электростатическое поле – это пространство с особыми свойствами: оно действует на другие заряды, помещённые в поле.

Пусть поле создаётся точечным зарядом Q (рис.10.3), а пробный заряд (то есть заряд, не искажающий поле) q находится от него на расстоянии r. Тогда сила, действующая на q со стороны Q, равна

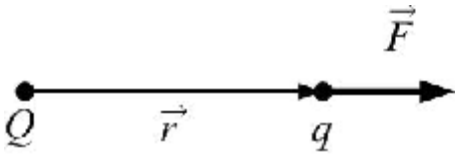


Рис.10.3

$$\vec{F} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \qquad (10.7)$$

Если в ту же точку вместо q поместить другой пробный заряд q_0, то сила будет равна

$$\vec{F}_0 = \frac{Q \cdot q_0}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

В обоих случаях отношение силы к пробному заряду одно и то же и не зависит от пробного заряда:

$$\frac{\vec{F}}{q} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Это отношение, характеризующее данную точку поля, назвали напряжённостью электростатического поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \qquad (10.8)$$

По определению, **напряжённость электростатического поля в данной точке численно равна силе, действующей на единичный положительный пробный точечный заряд, помещённый в данную точку поля**. Напряжённость $\vec{E}$ – ***силовая векторная характеристика поля.*** Если в точку поля с напряжённостью $\vec{E}$ поместить точечный заряд q, то на него со стороны поля будет действовать сила, равная $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$.

Из (10.7) и (10.8) следует, что напряжённость поля, созданного на расстоянии $\vec{r}$ точечным зарядом Q, равна

$$\vec{E}_{\text{т.з.}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \qquad (10.9)$$

Размерность напряжённости

$$[E] = \frac{Н}{Кл} = \frac{В}{м}.$$

Из (10.6) можно доказать принцип суперпозиции: **напряжённость поля, созданного в данной точке системой зарядов, равна векторной сумме напряжённостей полей, созданных в этой точке каждым зарядом в отдельности**.

$$\begin{cases} \vec{F} = \sum\limits_i \vec{F}_i = \sum\limits_i \left(q\vec{E}_i\right) = q \cdot \sum\limits_i \vec{E}_i \\ \vec{F} = q \cdot \vec{E} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \,. \qquad (10.10)$$

Во многих случаях заряды можно считать распределёнными непрерывно по объёму, по плоскости или по некоторой линии. Тогда вводят понятия ***объёмной, поверхностной или линейной плотности заряда*** соответственно:

$$\left.\begin{array}{l} \rho = \dfrac{dq}{dV} \quad - \text{объёмная} \\ \sigma = \dfrac{dq}{dS} - \text{поверхностная} \\ \tau = \dfrac{dq}{dl} - \text{линейная} \end{array}\right\} \quad \text{плотности заряда.} \qquad (10.11)$$

Смысл этих величин – заряд единицы объёма (или единицы площади поверхности, или единицы длины нити); размерности: $[\rho] = \dfrac{Кл}{м^3}$, $[\sigma] = \dfrac{Кл}{м^2}$, $[\tau] = \dfrac{Кл}{м}$. Тогда вместо суммы для (10.10) нужно использовать интеграл:

$$\vec{E} = \int_V d\vec{E}\,, \qquad (10.12)$$

где напряжённость поля, созданного почти точечным бесконечно малым зарядом dq, равна

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}\,, \qquad (10.13)$$

а интегрирование ведётся по всему объёму, где локализованы создающие поле заряды.

Пример:

Найти напряжённость поля, создаваемого зарядом q, равномерно распределённым по тонкому прямому стержню длиной l, в точке, лежащей на продолжении оси стержня на расстоянии a от ближайшего конца (рис. 10.4).

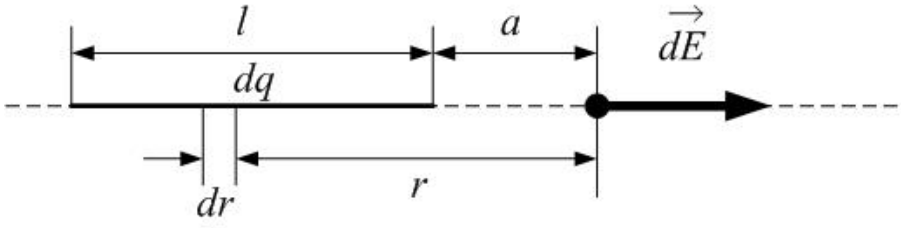


Рис.10.4

Решение:

На расстоянии r от точки, в которой нужно найти напряжённость поля, выделим элемент длины стержня dr. Он несёт почти точечный заряд $dq = \tau \cdot dr$, где $\tau = \frac{q}{l}$ – линейная плотность заряда. Этот заряд создаёт поле напряжённостью $d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$. Будем для определённости считать заряд положительным, тогда вектор $d\vec{E}$ направлен от стержня. Такое направление имеют все $d\vec{E}$, создаваемые зарядом любого элемента длины стержня, поэтому значки векторов в (10.12) можно убрать, а интегрировать нужно по всей длине стержня: $a \le r \le a + l$.

$$E = \int_a^{a+l} dE = \int_a^{a+l} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} = \int_a^{a+l} \frac{\tau \cdot dr}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_a^{a+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_a^{a+l}$$

$$E = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{a+l} + \frac{1}{a}\right) = \frac{q}{l} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot a(a+l)}.$$

Ответ: $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot a(a+l)}$.

Напряжённость поля можно изобразить с помощью ***линий напряжённости***, при этом касательная к линии в каждой точке указывает направление вектора $\vec{E}$, а густота линий напряжённости пропорциональна модулю $\vec{E}$ (рис.10.5).

Что такое «густота», понятно интуитивно, но можно дать и строгое определение: густота – число линий, пронизывающих малую площадку, перпендикулярную линиям, в расчёте на единичную площадь.

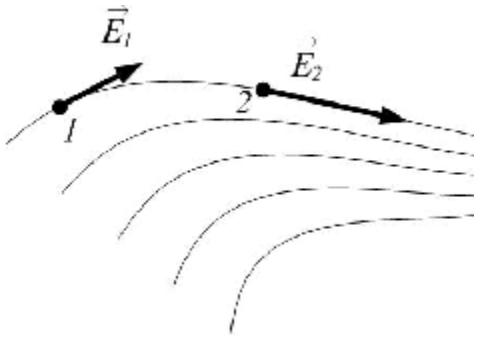


Рис.10.5

Линии напряжённости обладают следующими свойствами:

- начинаются на положительных зарядах или в бесконечности;
- заканчиваются на отрицательных зарядах или в бесконечности;
- не могут обрываться нигде, кроме зарядов;
- не могут пересекаться (иначе напряжённость в точке пересечения была бы определена неоднозначно).

На рис.10.6 изображены линии напряжённости: а) и б) точечных положительного и отрицательного зарядов; в) и г) системы двух одинаковых по величине одноимённых и разноимённых зарядов; д) конденсатора. Если размер обкладок конденсатора существенно больше расстояния между ними, то поле

конденсатора можно считать однородным: $\vec{E} = const$; то есть линии напряжённости параллельны и находятся на одинаковом расстоянии друг от друга; искажения есть только вблизи краёв пластин.

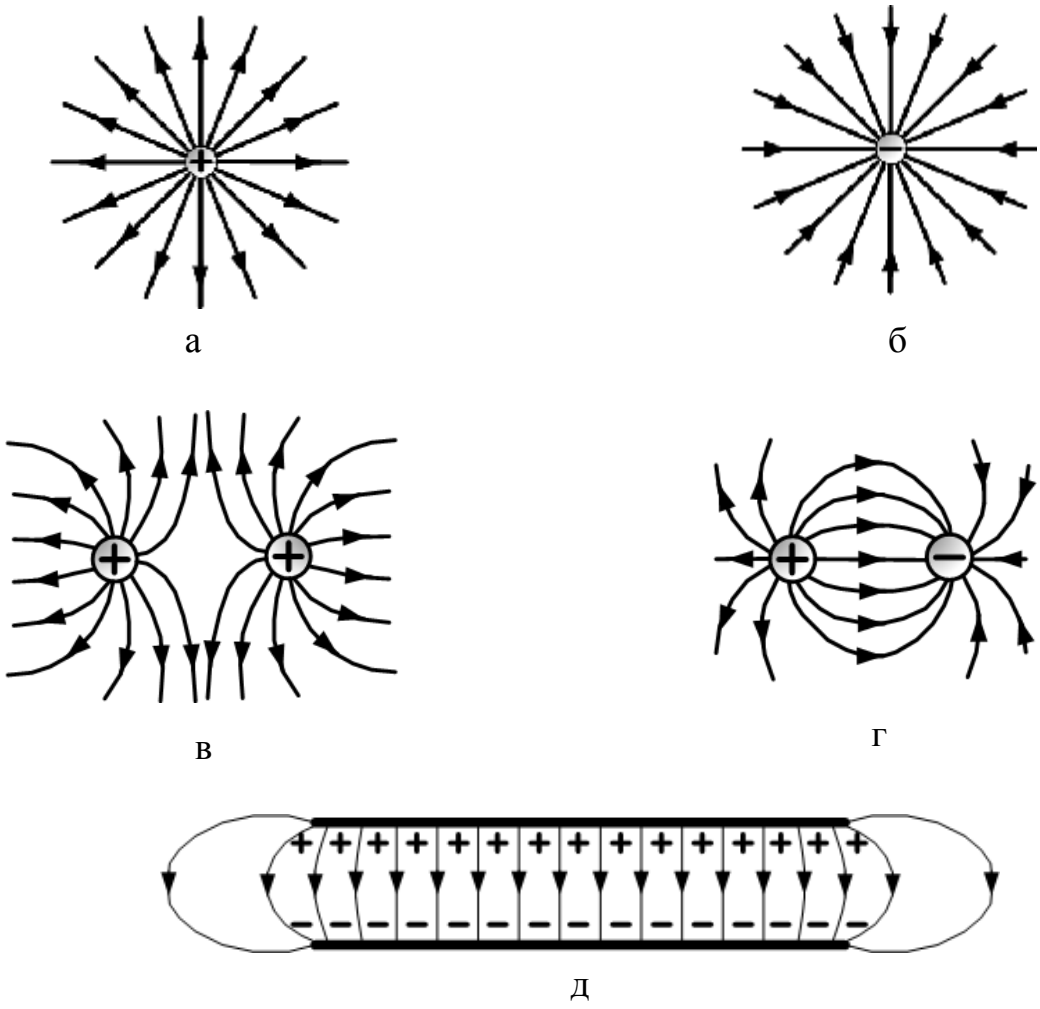


Рис.10.6

4. Поток вектора напряжённости. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

Рассмотрим некоторое электростатическое поле (рис.10.7). Возьмём площадку dS, такую малую, что в пределах этой площадки поле можно считать однородным: $\vec{E} = const$. Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к этой площадке. Введём вектор $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$. Тогда, по определению, потоком $d\Phi_E$ вектора напряжённости электростатического поля через площадку dS называется скалярное произведение векторов $\vec{E}$ и $d\vec{S}$:

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos\alpha, \qquad (10.14)$$

где α – угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{n}$. Поток вектора можно выразить через нормальную составляющую напряжённости $E_n = E \cdot \cos\alpha$:

$$d\Phi_E = E_n \cdot dS. \qquad (10.14а)$$

Поток вектора напряжённости равен числу линий напряжённости,

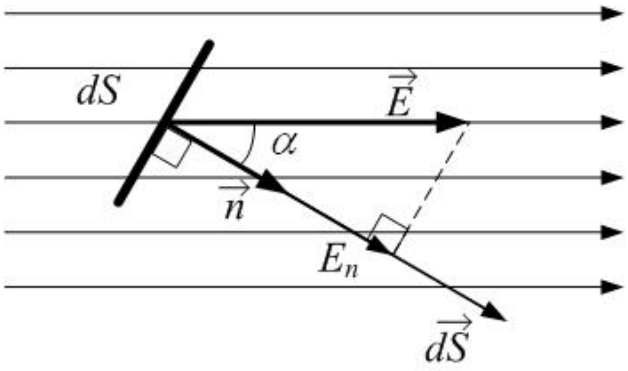


Рис.10.7

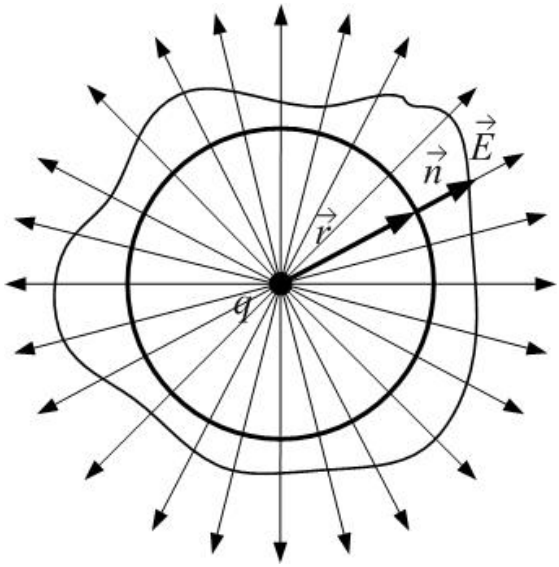


Рис.10.8

пронизывающих площадку. Знак потока зависит от выбора нормали к площадке. Поток вектора напряжённости через поверхность конечных размеров можно рассчитать, взяв интеграл от (10.14) по этой поверхности:

$$\Phi_E = \int\limits_S d\Phi_E = \int\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int\limits_S E_n \cdot dS \,. \qquad (10.15)$$

Для замкнутых поверхностей нормаль всегда внешняя, так что неопределённость в знаке потока снимается:

$$\Phi_E = \oint\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint\limits_S E_n \cdot dS \,.$$

Найдём поток Φ_E поля точечного заряда q (пусть для определённости $q>0$) через сферу радиуса r, описанную вокруг заряда (рис.10.8). В любой точке сферы напряжённость поля одинакова, равна $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$ и направлена по нормали к поверхности сферы; то есть $\alpha = 0$. Тогда

$$\Phi_E = \oint\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint\limits_S E \cdot dS = E \cdot \oint\limits_S dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} . \qquad (10.15)$$

Число линий, пронизывающих поверхность, не изменится, если взять любую другую замкнутую поверхность, охватывающую заряд, поскольку линии нигде не обрываются (см. рис.10.8). Значит, (10.15) справедливо для замкнутой поверхности любой формы, охватывающей заряд.

Пусть теперь произвольная поверхность охватывает систему точечных зарядов, тогда в любой точке поверхности по принципу суперпозиции $\vec{E} = \sum\limits_i \vec{E}_i$, и поток вектора напряжённости равен

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \left(\sum_i \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_i \left(\oint_S \vec{E}_i d\vec{S} \right) = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i \, .$$

Доказана ***теорема Гаусса (Остроградского-Гаусса)*** для электростатического поля в вакууме:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i \qquad (10.16)$$

Поток вектора напряжённости электростатического поля в вакууме через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, охваченных этой поверхностью, делённой на электрическую постоянную ε_0.

5. Применение теоремы Гаусса

Теорему Гаусса удобно применять для расчёта электростатических полей зарядов, в распределении которых присутствует симметрия.

5.1. Поле бесконечной равномерно заряженной нити (цилиндра)

Пусть нить заряжена с линейной плотностью заряда τ. Найдём напряжённость электростатического поля на расстоянии r от неё. Возьмем Гауссову поверхность в виде цилиндра высотой l и радиусом r, ось которого совпадает с нитью (рис.10.9). Вектор $\vec{E}$ напряженности электростатического поля в силу симметрии может быть направлен только перпендикулярно боковой поверхности цилиндра, параллельно основаниям, тогда в левой части (10.16) надо учитывать только вклад через боковую поверхность цилиндра (для оснований $\alpha=90^0$, $\cos\alpha=0$), причём для боковой поверхности $\alpha=0$, $\cos\alpha=1$. Кроме того, в силу симметрии значение напряженности в любой точке боковой поверхности Гауссова цилиндра одинаково, и значение E можно вынести за знак интеграла. Тогда

$$\Phi_E = \oint_S E \cos\alpha \cdot dS = E \cdot \int\limits_{\substack{\text{по} \\ \text{боковой} \\ \text{поверхности}}} dS = E \cdot l \cdot 2\pi \cdot r \, , \qquad (10.17)$$

где $S = 2\pi \cdot r \cdot l$ – площадь боковой поверхности Гауссова цилиндра.

Теперь вычислим правую часть (10.16). Внутрь Гауссовой поверхности попадают заряды, находящиеся только на отрезке нити длиной l, тогда суммарный заряд (по определению линейной плотности заряда $\tau = \frac{dq}{dl}$):

$$\sum_i q_i = \tau \cdot l \; ;$$

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \tau \cdot l \, .$$

Из (10.17)

$$E \cdot l \cdot 2\pi \cdot r = \frac{1}{\varepsilon_0}\tau \cdot l\,,$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 \cdot r}. \qquad (10.18)$$

Если нить заменить тонкостенным цилиндром (трубкой) радиуса R, равномерно заряженным по длине, то вне цилиндра ($r > R$) поле будет такое же, как для нити: при выводе (10.18) ничего принципиально не изменится (см. рис.10.9, гауссова поверхность 1).

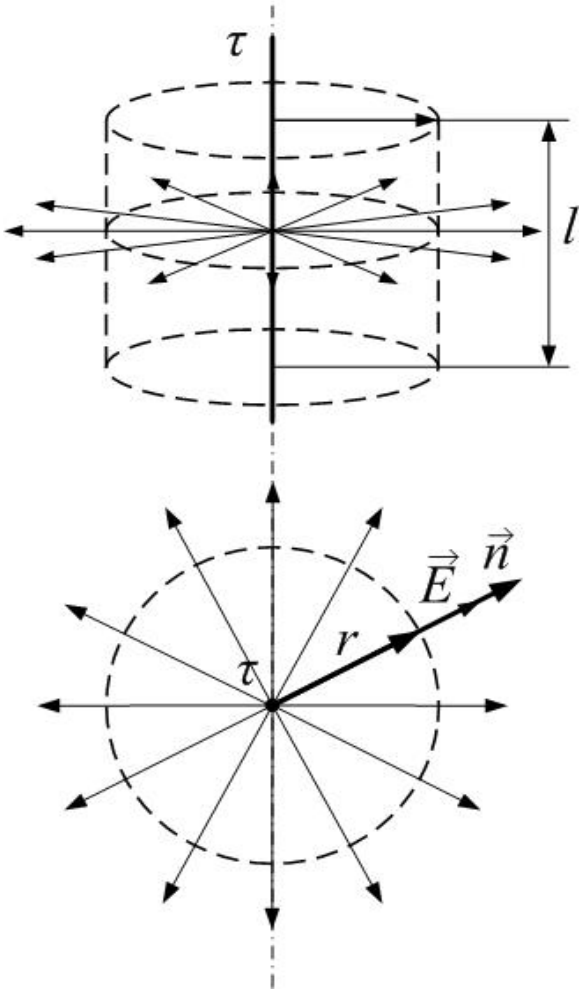


Рис.10.9

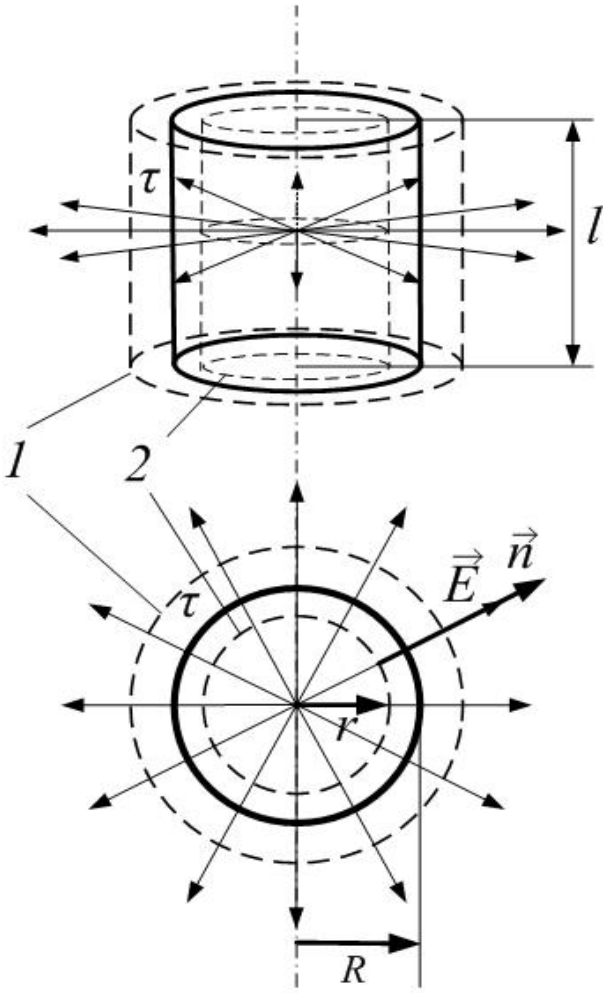


Рис.10.10

Для определения напряжённости поля внутри цилиндра ($r < R$) гауссову поверхность проведём внутри трубки (поверхность 2 на рис.10.10). Внутри неё зарядов нет, поэтому из теоремы Гаусса получим:

$$\Phi_E = \oint_S E\cos\alpha dS = E \cdot l \cdot 2\pi \cdot r = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i = 0, \text{ откуда } E = 0\,.$$

Внутри цилиндра поля нет.

5.2. Поле сферы, равномерно заряженной по объёму

Пусть сфера (шар) радиуса R равномерно заряжена по объёму с объёмной плотностью заряда ρ (для определённости пусть $\rho > 0$). Вне сферы зарядов нет.

Проведём Гауссову поверхность – сферу радиусом r, концентрическую данной. Для определения напряжённости внутри заряженного шара возьмём $r < R$ (рис.10.11, поверхность 1). Суммарный заряд внутри гауссовой сферы равен $\sum q = \rho \cdot V_{\text{гаусс.сферы}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, а поток вектора напряжённости из соображений симметрии вычисляется как произведение напряжённости поля на площадь гауссовой сферы: $\Phi_E = E \cdot S_{\text{гаусс.сферы}} = E \cdot 4\pi \cdot r^2$. Тогда по теореме Гаусса

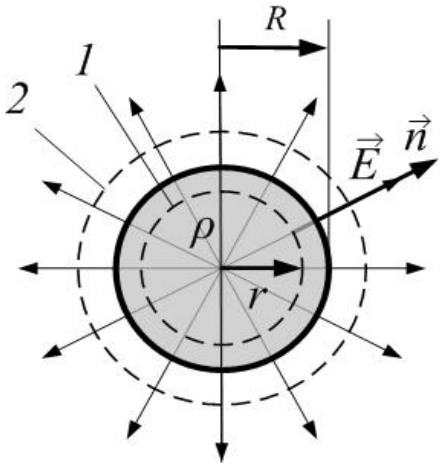


Рис.10.11

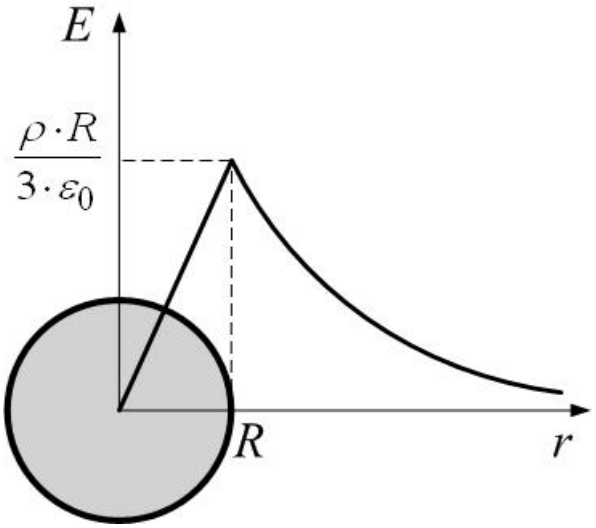


Рис.10.12

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3,$$

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3,$$

$$E_{\text{внутри}} = \frac{\rho \cdot r}{3 \cdot \varepsilon_0}. \qquad (10.19)$$

Для определения напряжённости вне заряженного шара проводим гауссову поверхность – сферу радиуса $r > R$ (поверхность 2 на рис.10.11). Заряд q, попавший внутрь неё – это заряд всего заряженного шарика радиуса R:

$$q = \rho \cdot V_{\text{заряж.сферы}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3.$$

Тогда получим:

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot q = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3,$$

$$E_{\text{вне}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}.$$

Поле вне заряженной сферы определяется её полным зарядом. То же самое через плотность заряда:

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \qquad \Rightarrow \qquad E_{\text{вне}} = \frac{\rho \cdot R^3}{3 \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \qquad (10.20)$$

При $r = R$ обе формулы (10.19) и (10.20) дают одно и то же значение:

$$E_{(r=R)} = \frac{\rho \cdot R}{3 \cdot \varepsilon_0}.$$

График зависимости $E = f(r)$ дан на рис.10.12.

5.3. Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости

Пусть бесконечная плоскость равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда $\sigma = \frac{dq}{dS} > 0$ (рис.10.13). Гауссова поверхность – цилиндр, образующая которого перпендикулярна плоскости, а основания площадью S расположены симметрично по обе стороны от плоскости на одинаковых расстояниях от неё. В силу симметрии вектор $\vec{E}$ напряжённости поля направлен от плоскости перпендикулярно к ней. Поэтому поток вектора $\vec{E}$ через боковую поверхность цилиндра равен нулю, а через основания $\Phi_E = E \cdot 2S$. Суммарный заряд внутри гауссовой поверхности – заряд круга площадью S, вырезанного на плоскости цилиндром: $q = \sigma \cdot S$. Тогда по теореме Гаусса

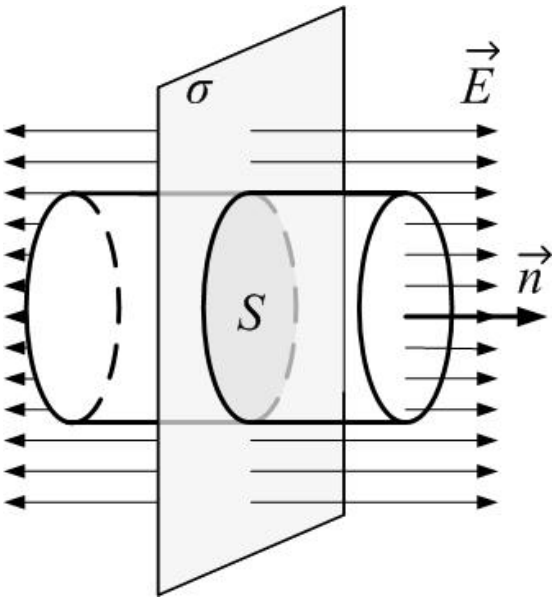


Рис.10.13

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

$$E \cdot 2S = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \cdot S$$

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0}. \qquad (10.21)$$

5.4. Поле двух параллельных бесконечных равномерно заряженных плоскостей (расчёт по принципу суперпозиции)

Имеются две бесконечные параллельные равномерно заряженные плоскости (рис. 10.14,а). Пусть для определённости поверхностные плотности заряда $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$. Напряжённость поля первой плоскости $\vec{E}_1$, второй – $\vec{E}_2$. Эти векторы направлены ОТ плоскости, создающей соответствующее поле. На рис.10.13 указаны направления векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ в каждой их трёх областей, на которые две плоскости делят пространство. Результирующую напряжённость находим по принципу суперпозиции: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. В проекциях на ось OX для каждой из областей:

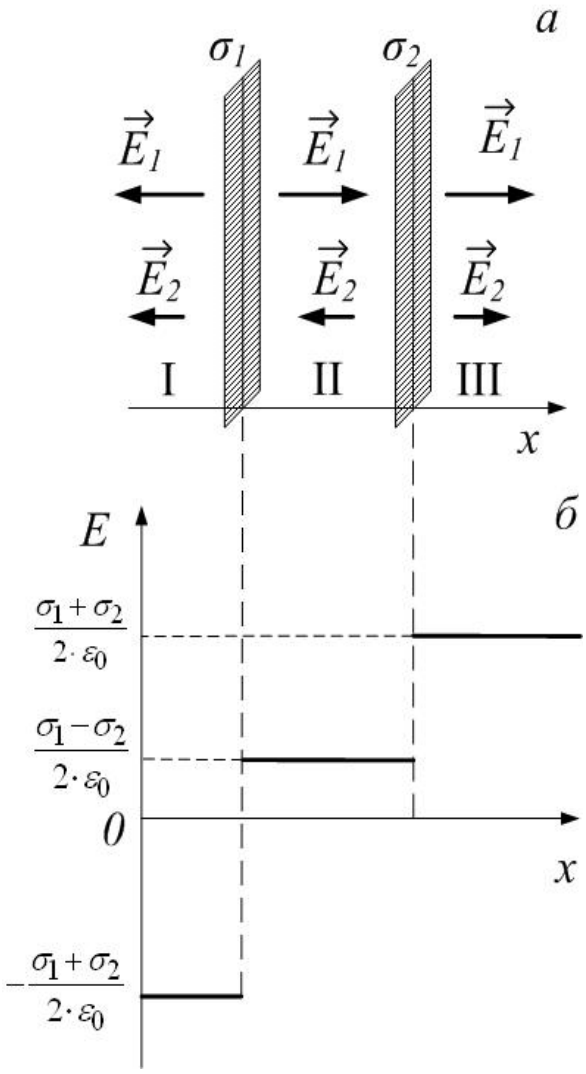


Рис.10.14

$$E_{\mathrm{I}x} = -E_1 - E_2 = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

$$E_{\mathrm{II}x} = E_1 - E_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

$$E_{\mathrm{III}x} = E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \cdot \varepsilon_0},$$

где $E_1 = \frac{\sigma_1}{2 \cdot \varepsilon_0}$ и $E_2 = \frac{\sigma_2}{2 \cdot \varepsilon_0}$ получены из (10.21). Видно, что $|E_{\mathrm{III}x}| = |E_{\mathrm{I}x}|$. На рис. 10.14,б изображена зависимость проекции $E_x = f(x)$.

В частном случае заряженного конденсатора $\sigma_1 = -\sigma_2$ $|\sigma_1| = |\sigma_2| = \sigma$. Поля вне конденсатора нет:

$$E_{\mathrm{III}x} = E_{\mathrm{I}x} = 0,$$

а между обкладками конденсатора напряжённость равна

$$E_{\text{конд.}} = E_{\mathrm{II}x} = \frac{2\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (10.22)$$

Лекция 2 (11)

Работа в электростатическом поле

Потенциал

Связь между напряженностью и потенциалом

План

1. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле
2. Потенциальный характер электростатического поля. Теорема о циркуляции
3. Потенциал
4. Связь между напряженностью и потенциалом
5. Электрический диполь. Энергия диполя

1. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле

Найдём работу электростатических сил по перемещению точечного заряда q в электростатическом поле точечного заряда Q (рис.11.1).

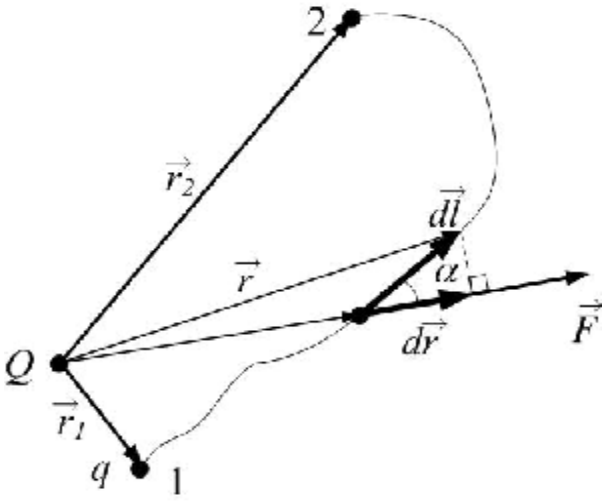


Рис.11.1

При перемещении на малый вектор $d\vec{l}$ работа равна:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F \cdot \cos\alpha \cdot dl = F \cdot dr, \quad (11.1)$$

так как проекция перемещения $d\vec{l}$ равна dr: $\cos\alpha \cdot dl = dr$.

По определению напряжённости поля

$$F = qE,$$

тогда

$$dA = F \cdot dr = qE \cdot dr. \quad (11.2)$$

Напряжённость поля точечного заряда Q:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}.$$

Вычислим работу при перемещении заряда q от точки 1 до точки 2:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{r_1}^{r_2} qE \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} q \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot dr = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{r^2}\right) \cdot dr = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2}$$

$$A_{12} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \quad (11.3)$$

По закону сохранения энергии работа A_{12} совершается за счёт уменьшения потенциальной энергии W взаимодействия зарядов:

$$A_{12} = -\Delta W = -(W_2 - W_1), \quad (11.4)$$

поэтому можно из (11.3) получить выражение для потенциальной энергии взаимодействия точечных зарядов в вакууме:

$$\left.\begin{aligned} A_{12} &= -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \\ A_{12} &= -(W_2 - W_1) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + const$$

Константу удобно считать равной нулю, так как на очень больших расстояниях заряды не взаимодействуют: при $r \to \infty$ должно быть $W_\infty = 0$. Итак:

$$W = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r}. \qquad (11.5)$$

Замечание к (11.5): если заряды имеют одинаковый знак, энергия их взаимодействия (отталкивания) положительна, так как произведение зарядов положительно; для разноимённых зарядов энергия притяжения получается отрицательной.

2. Потенциальный характер электростатического поля. Теорема о циркуляции

Из (11.3) видно, что **работа A_{12} не зависит от траектории, а только от начального и конечного положения** заряда q. Такие **поля называются потенциальными. Электростатическое поле потенциально**. Потенциальны поля только неподвижных зарядов.

Если точки 1 и 2 совпадают, то есть траектория замкнута, $r_1 = r_2$, и (11.3) даёт

$$A = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = 0,$$

$$A = \oint_L dA = 0.$$

Здесь интеграл берётся по замкнутому контуру L. Поскольку $\vec{F} = q\vec{E}$ и $dA = \vec{F} \cdot d\vec{l}$, то

$$A = \oint_L dA = \oint_L q\vec{E}d\vec{l} = q\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0.$$

Отсюда

$$\boxed{\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0} \qquad (11.6)$$

Интеграл в левой части (11.6) называется ***циркуляцией вектора напряжённости*.** Контур L был произвольным, поэтому доказана

теорема о циркуляции: **циркуляция вектора напряжённости электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю**.

Для того, чтобы векторное поле было потенциально, необходимо и достаточно, чтобы циркуляция вектора напряжённости поля по произвольному замкнутому контуру была равна нулю, то есть:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{поле потенциально}.$$

Напомним, что потенциальны только поля НЕПОДВИЖНЫХ зарядов.

3. Потенциал

Введём определение потенциала:

Потенциал данной точки поля – это энергия единичного положительного точечного пробного заряда, помещённого в данную точку:

$$\varphi = \frac{W}{q}. \qquad (11.7)$$

Если точечный заряд q поместить в точку поля, имеющую потенциал φ, то энергия заряда будет равна

$$W = q \cdot \varphi. \qquad (11.8)$$

Потенциал – скалярная энергетическая характеристика поля. Так же как и потенциальная энергия, потенциал определяется с точностью до постоянного слагаемого. Обычно полагают, что $W_\infty = 0$: бесконечно удалённая от зарядов точка является началом отсчёта потенциальной энергии. Потенциал поля на бесконечности тоже равен нулю. Но за начало отсчёта можно взять любую точку: важно не абсолютное значение энергии или потенциала, а изменение энергии в каком-то процессе; не абсолютное значение потенциала, а разность потенциалов двух точек поля.

Поэтому можно ввести эквивалентное определение потенциала: **потенциал данной точки поля численно равен работе по перемещению единичного точечного пробного положительного заряда из данной точки поля на бесконечность.**

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q}. \qquad (11.9)$$

Размерность потенциала – вольт:

$$[\varphi] = \frac{Дж}{Кл} = В.$$

Из (11.7) и (11.5) получим выражение для потенциала поля, созданного точечным зарядом Q на расстоянии r:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{W}{q} \\ W &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\text{точечн.зар.}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r}. \qquad (11.10)$$

Для потенциала справедлив принцип суперпозиции (11.11): потенциал, созданный в данной точке системой зарядов q_i, равен алгебраической сумме потенциалов, созданных в данной точке каждым зарядом системы в отдельности.

$$\varphi = \sum_i \varphi_i. \qquad (11.11)$$

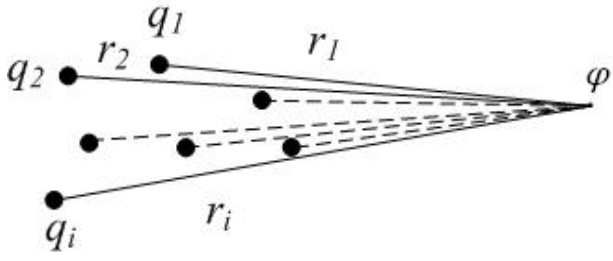


Рис.11.2

Например, для системы точечных зарядов на рис.11.2:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r_i}.$$

В случае непрерывно распределённых зарядов

$$\varphi = \int_V d\varphi. \qquad (11.12)$$

Здесь интеграл берётся по всей области, где локализованы заряды, а потенциал $d\varphi$, созданный почти точечным зарядом $dq = \rho \cdot dV$, локализованным в элементарном малом объёме dV, равен

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r}. \qquad (11.13)$$

Энергия системы точечных зарядов может быть рассчитана по формуле

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \cdot \varphi_i, \qquad (11.14)$$

где φ_i – суммарный потенциал, созданный всеми зарядами системы, кроме заряда q_i, в точке, где находится заряд q_i. Например, для системы, состоящей из двух зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии *r* друг от друга:

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \cdot \varphi_i = \frac{1}{2}\left(q_1 \cdot \varphi_1 + q_2 \cdot \varphi_2\right),$$

где $\varphi_1 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r}$ – потенциал, созданный ВТОРЫМ зарядом там, где находится первый, а $\varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r}$ – потенциал, созданный ПЕРВЫМ зарядом там, где находится второй; тогда

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1 \cdot \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} + q_2 \cdot \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r}\right) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r}.$$

4. Связь между напряженностью и потенциалом

Работа по перемещению заряда *q* на вектор $d\vec{r}$ в поле напряжённостью $\vec{E}$ равна $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

$$\left.\begin{aligned} dA &= \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \vec{F} &= q\vec{E} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad dA = q\vec{E} \cdot d\vec{r}. \qquad (11.15)$$

Работа совершается за счёт уменьшения потенциальной энергии:

$$\left.\begin{aligned} dA &= -dW \\ W &= q\varphi \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad dA = -qd\varphi. \qquad (11.16)$$

Тогда получим:

$$q\vec{E} \cdot d\vec{r} = -qd\varphi$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = -d\varphi. \qquad (11.17)$$

Отсюда получим, что напряжённость поля равна по величине и противоположна по направлению градиенту потенциала:

$$\boxed{\vec{E} = -grad\varphi} \tag{11.18}$$

Напомним, что градиент – это вектор, проекции которого на координатные оси равны частным производным скалярного поля (в данном случае – потенциала φ) по соответствующей координате, то есть:

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k};$$

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{cases} \tag{11.19}$$

Вектор градиента направлен в сторону наибольшего возрастания величины. Поскольку в (11.18) стоит знак «–», то напряжённость направлена в сторону наибыстрейшего убывания потенциала. Это понятно, так как сила, действующая на положительный заряд, направлена по полю $\vec{E}$; положительный заряд переносится полем туда, где потенциал меньше.

Формула (11.18) даёт связь напряжённости и потенциала в дифференциальном виде. Получим эту связь в интегральной форме. Для этого найдём работу по перемещению заряда из точки 1 в точку 2. С одной стороны, из (11.4):

$$A_{12} = -\Delta W = -(W_2 - W_1)$$

и определения потенциала $W = q\varphi$:

$$W_1 = q\varphi_1, \quad W_2 = q\varphi_2$$

получим выражение для работы сил поля, полезное при решении задач:

$$A_{12} = -\Delta W = -(W_2 - W_1) = -(q\cdot\varphi_2 - q\cdot\varphi_1) = -q\cdot\Delta\varphi$$

$$A_{12} = -q\cdot\Delta\varphi. \tag{11.20}$$

С другой стороны, работа силы $\vec{F} = q\vec{E}$ при перемещении заряда q равна

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{l} = q\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}, \tag{11.21}$$

где интегрирование ведётся по любой линии, соединяющей точки 1 и 2. Тогда, приравняв правые части (11.20) и (11.21), получим:

$$\boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}} \tag{11.22}$$

Можно доказать (11.22), интегрируя (11.17) по произвольному контуру (для удобства заменили $d\vec{r}$ на элемент длины контура $d\vec{l}$):

$$\vec{E}\cdot d\vec{l} = -d\varphi$$

$$\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_1^2 d\varphi$$

$$\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad \Rightarrow \qquad \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\Delta\varphi\,.$$

Если поле однородно ($\vec{E} = const$) и направлено, например, вдоль оси OX, то из (11.21):

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -E\cdot\Delta x$$

или

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta x} = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\,. \qquad (11.23)$$

Эквипотенциальной поверхностью называется совокупность точек пространства, имеющих одинаковый потенциал: $\varphi = const$ **.**

Линии напряжённости всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. При переносе заряда по данной эквипотенциальной поверхности работа силами поля совершаться не должна, так как разность потенциалов в (11.20) равна нулю. Следовательно, сила, а значит, и напряжённость $\vec{E}$, перпендикулярны траектории, поскольку $\vec{F} = q\vec{E}$.

Эквипотенциальные поверхности поля точечного заряда – концентрические сферы (рис.11.3).

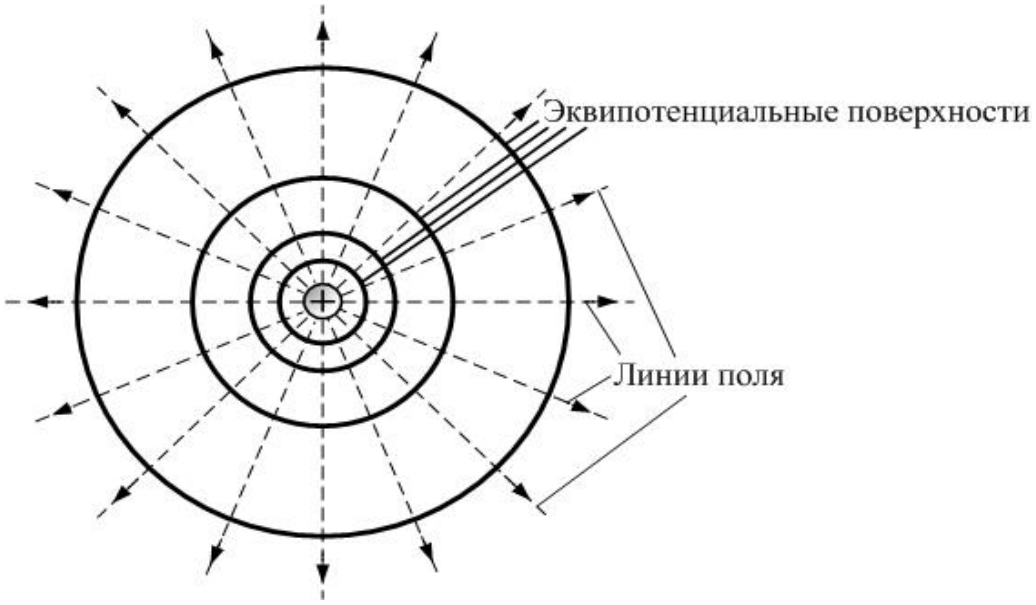


Рис.11.3

На рис.11.4 изображены эквипотенциальные поверхности и линии напряжённости электростатического поля различных систем зарядов:

a – поле точечного положительного заряда;
b – поле двух разноимённых зарядов;
c – поле двух зарядов одного знака.

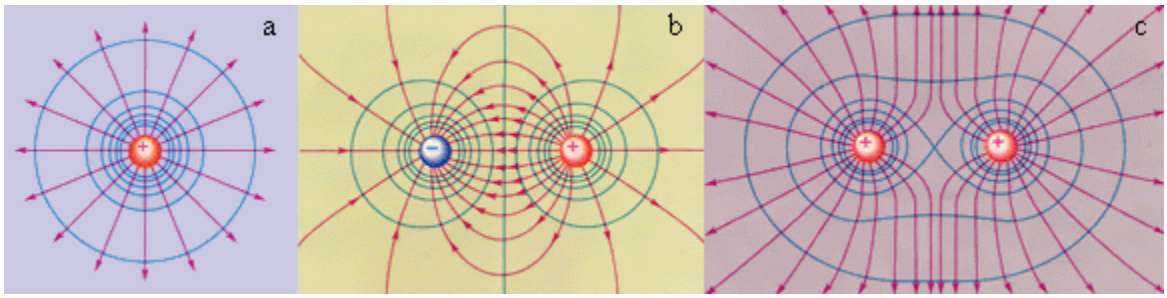


Рис.11.4

На рис.11.5 изображено поле заряженного плоского конденсатора: пунктир – силовые линии поля, а эквипотенциальные поверхности – сплошные линии. Внутри конденсатора поле почти однородно; эквипотенциальные поверхности – равноотстоящие друг от друга плоскости, перпендикулярные силовым линиям.

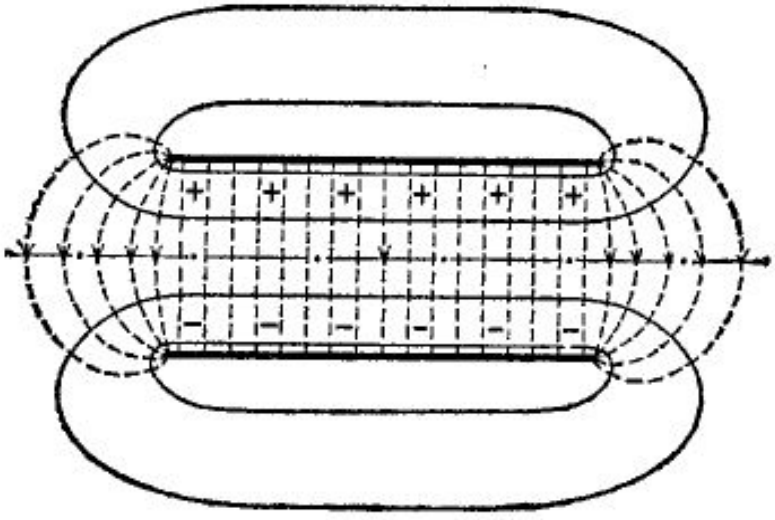


Рис.11.5

5. Электрический диполь. Энергия диполя

Определение: **электрическим диполем называется система двух одинаковых по величине противоположных по знаку точечных зарядов:** q и $-q$ (рис.11.6).

Плечо диполя $\vec{l}$ – вектор, начинающийся на отрицательном заряде и оканчивающийся на положительном.

Дипольный момент электрического диполя – вектор, равный произведению модуля заряда диполя на плечо диполя

$$\vec{p}_e = q \cdot \vec{l} \,. \qquad (11.24)$$

Поместим диполь ***в однородное электрическое поле***; α – угол между вектором напряжённости и дипольным моментом (рис.11.7). На заряды q и $-q$ будут действовать силы, одинаковые по величине

$$F_1 = F_2 \equiv F = qE$$

и противоположные по направлению – это пара сил. **Диполь в электрическом поле ориентируется по полю.** При $\alpha = 0$ момент сил тоже $M = 0$.

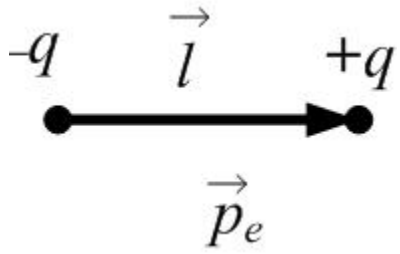


Рис.11.6

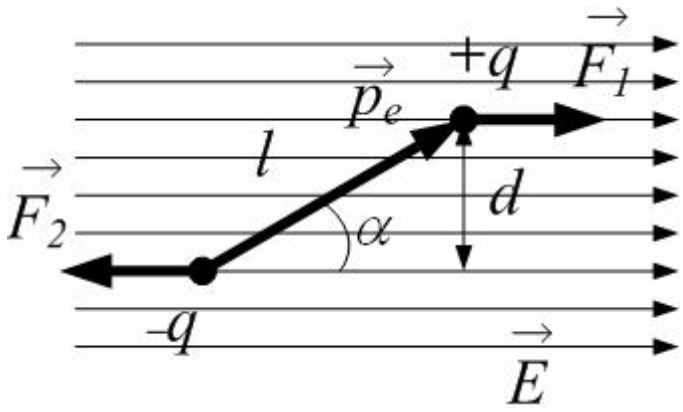


Рис.11.7

Вращающий момент пары сил равен произведению силы на плечо пары, то есть на расстояние между линиями сил $d = l \cdot \sin\alpha$:

$$M = F \cdot d = F \cdot l \cdot \sin\alpha,$$

$$M = qE \cdot l \cdot \sin\alpha = (ql)E \cdot \sin\alpha = p_e E \sin\alpha.$$

Пара сил поворачивает диполь по часовой стрелке на рис.11.7. Направление вектора момента пары можно определить по правилу буравчика: $\vec{M}$ направлен от нас перпендикулярно плоскости рисунка . Окончательно в векторном виде:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_e \times \vec{E}\right]. \qquad (11.25)$$

Работа внешних сил по повороту диполя на угол $d\alpha > 0$ против часовой стрелки (рис.11.7) равна

$$dA = M \cdot d\alpha$$

и идёт на увеличение энергии диполя в электрическом поле:

$$dA = dW.$$

Тогда

$$dW = M \cdot d\alpha$$

$$\frac{dW}{d\alpha} = M = p_e E \sin\alpha.$$

Отсюда

$$W = -p_e E \cos\alpha,$$

$$W = -\vec{p}_e \vec{E}, \qquad (11.26)$$

так как $(\cos\alpha)' = -\sin\alpha$, а $\vec{E}$ и $\vec{p}_e$ не зависят от угла α (диполь считаем жёстким, $l = const$).

Поместим ***диполь в <u>не</u>однородное электрическое поле*** (рис.11.8). Пусть угол $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$. Тогда сила, действующая на положительный заряд и направленная по полю, больше, чем действующая на отрицательный и направленная против поля, так как справа на рис.11.8 поле сильнее:

$$F_1 = qE_1 > F_2 = qE_2.$$

В результате возникла результирующая сила, направленная по полю. **Диполь втягивается в область сильного поля, если** $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$.

И наоборот (рис.11.9): если $\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi$, то диполь выталкивается из области сильного поля.

Реально свободный диполь ориентируется по полю, а затем втягивается в сильное поле.

Можно вычислить результирующую силу, действующую на диполь в электростатическом поле. В теме «Механика» было показано, что

$$\vec{F} = -gradW_{\text{пот.}};$$

тогда

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-p_e E\cos\alpha\right) = p_e\cos\alpha\,\frac{\partial E}{\partial x}.$$

Так что если $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha > 0$. Если поле усиливается вдоль оси OX

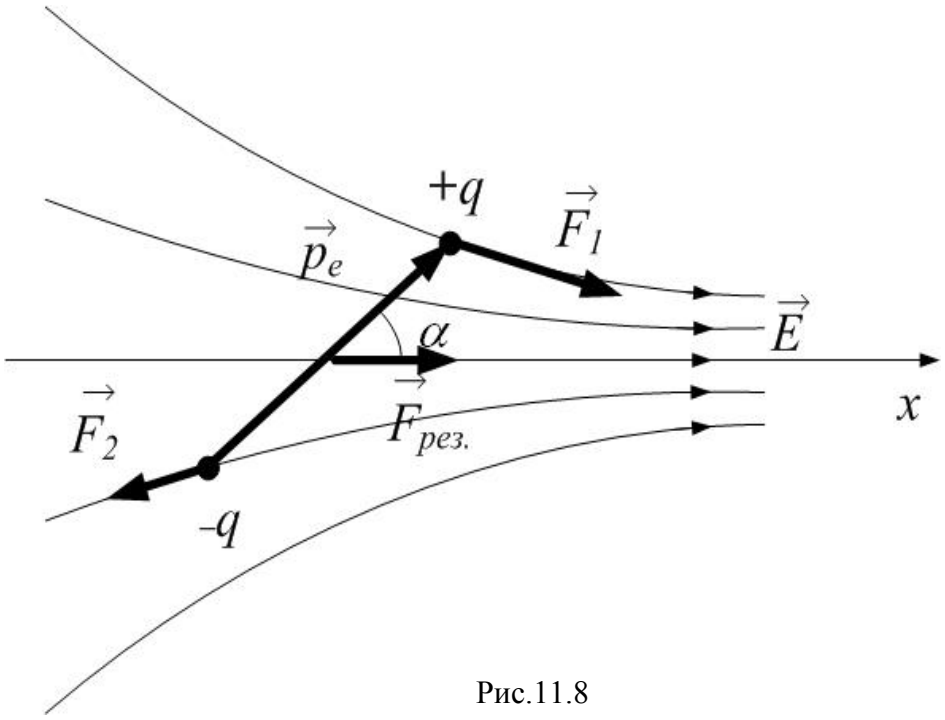


Рис.11.8

$\frac{\partial E}{\partial x} > 0$, то проекция результирующей силы на ось OX положительна:

$$F_x = p_e\cos\alpha\,\frac{\partial E}{\partial x} > 0.$$

Если $\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha < 0$, и

$$F_x = p_e\cos\alpha\,\frac{\partial E}{\partial x} < 0.$$

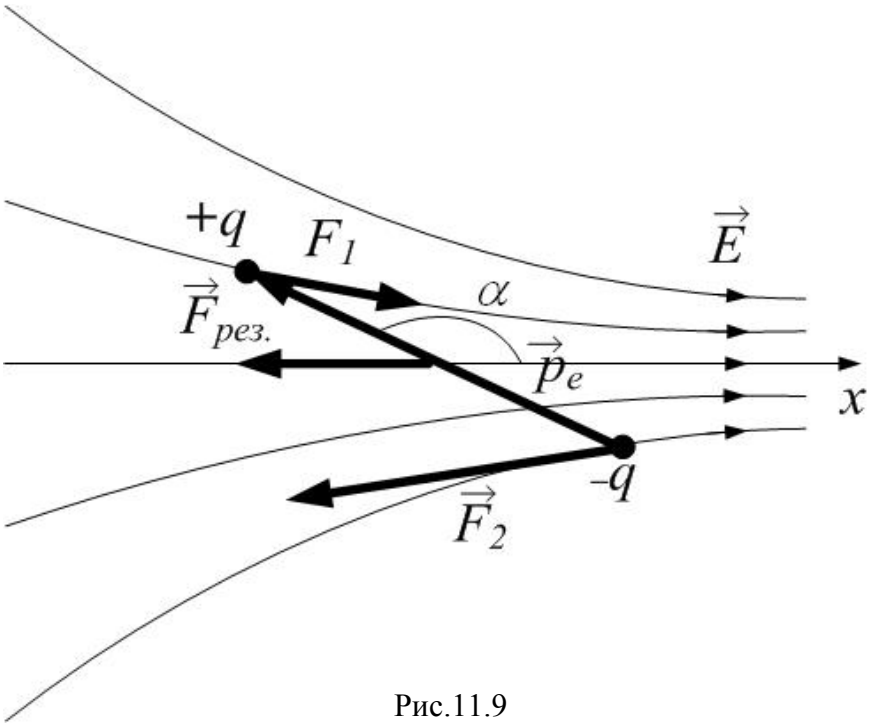


Рис.11.9

Лекция 3 (12)

Поляризация диэлектриков. Проводники. Электроемкость

План

1. Виды диэлектриков и их поляризация
2. Вектор поляризации
3. Электростатическое поле в диэлектрике
4. Вектор электрического смещения
5. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике
6. Формулы для поля в диэлектрике
7. Проводники в электростатическом поле.
8. Электроёмкость проводника
9. Конденсаторы. Ёмкость конденсатора
10. Энергия заряженного проводника (конденсатора)
11. Объёмная плотность энергии электростатического поля

1. Виды диэлектриков и их поляризация

В зависимости от концентрации свободных зарядов тела делятся на:

- проводники (много свободных зарядов)
- диэлектрики (свободных зарядов практически нет)
- полупроводники (свободные заряды есть, но их меньше, чем в проводниках).

Виды диэлектриков:

1) Диэлектрики с <u>неполярными</u> молекулами. Электронная поляризация

Молекулы неполярных диэлектриков не имеют дипольного момента, так как центр тяжести отрицательных зарядов электронов совпадает с центром тяжести положительных ядер (рис.12.1,а):

$$\vec{p}_e = 0.$$

К неполярным диэлектрикам относятся вещества с симметричными молекулами, например, O_2, N_2, CO_2. Во внешнем электрическом поле отрицательное электронное облако молекулы смещается против поля:

$$\vec{F} = q\vec{E}, \quad q < 0,$$

центры тяжести положительных и отрицательных зарядов расходятся, и молекула приобретает дипольный момент $\vec{p}_e$ (рис.12.1,б). Он направлен по полю и пропорционален напряжённости внешнего поля:

$$\vec{p}_e = \varepsilon_0 \cdot \beta \cdot \vec{E}, \qquad (12.1)$$

где β – ***поляризуемость*** молекулы. Поляризуемость β характеризует способность молекулы приобретать дипольный момент во внешнем электрическом поле и имеет порядок величины (и размерность тоже, разумеется) объёма электронного облака, $[\beta] = м^3$. Действительно, чем больше объём

электронного облака, тем бо́льшим может быть дипольный момент, приобретённый молекулой во внешнем поле.

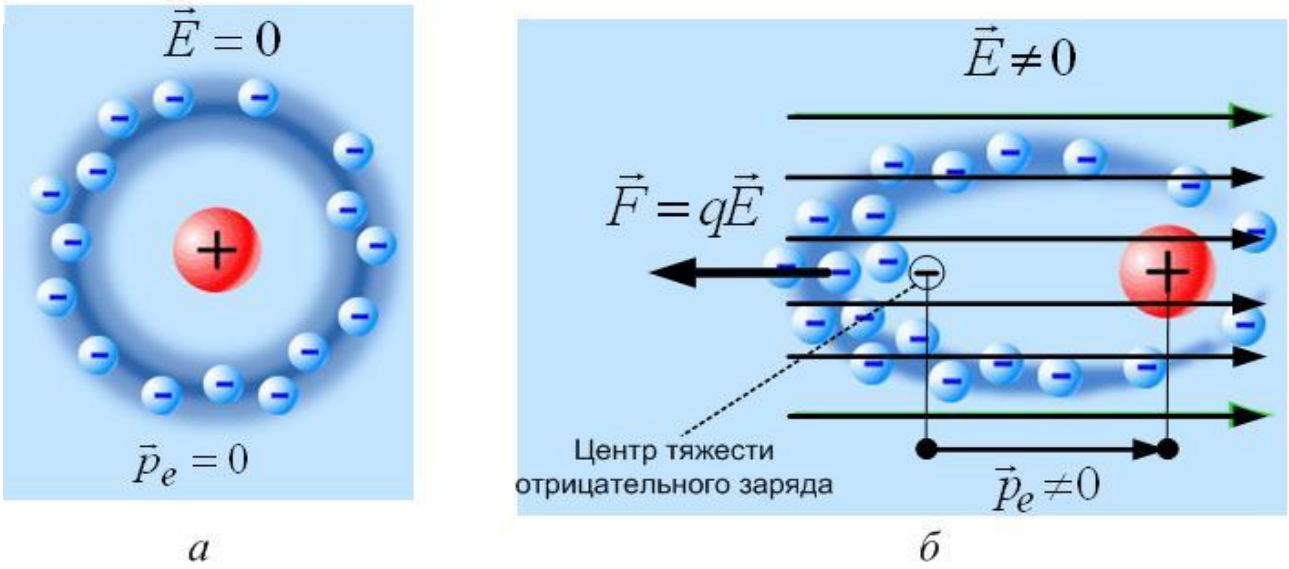


Рис.12.1

Дипольные моменты всех молекул направлены одинаково; **вещество в целом также приобретает дипольный момент – поляризуется**. Такая поляризация называется ***электронной***, поскольку возникает при смещении электронного облака молекулы.

2) Полярные диэлектрики. Дипольная (ориентационная) поляризация.

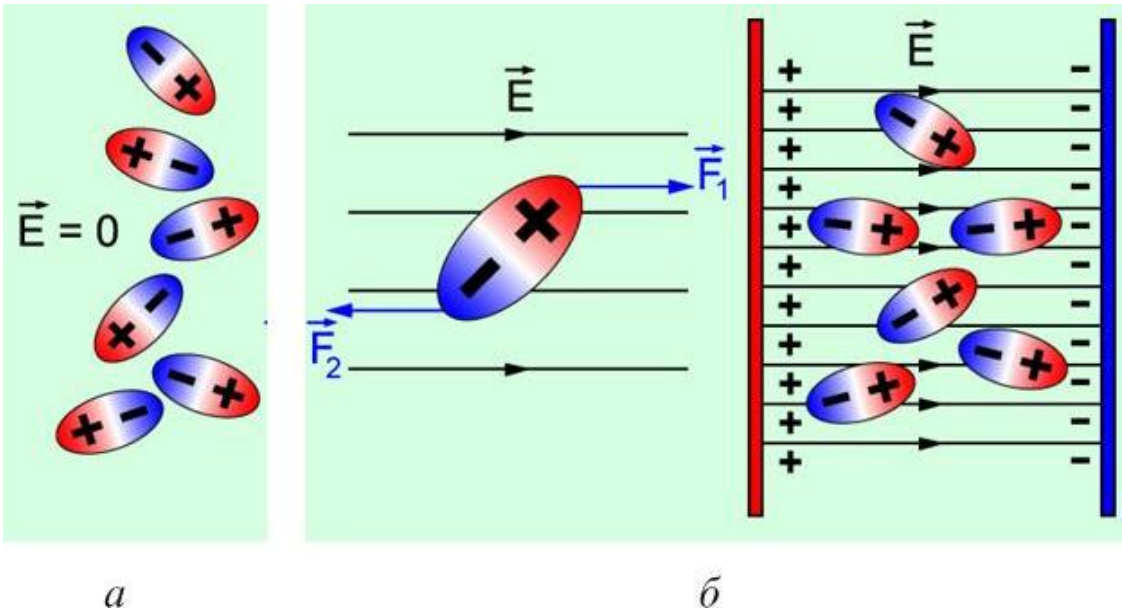


Рис.12.2

Центры тяжести таких молекул в отсутствие внешнего поля не совпадают – молекулы несимметричны (например, это H_2O, HCl, SO_2), поэтому молекула обладает дипольным моментом: $\vec{p}_e \neq 0$. В целом вещество дипольным моментом не обладает (не поляризовано) из-за хаотичной ориентации диполей (рис.12.2,а).

Если поместить такие молекулы-диполи во внешнее поле, на них будет действовать вращающий момент силы

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_e \times \vec{E}\right], \qquad (12.2)$$

разворачивающий молекулы по полю (рис.12.2,б). Из-за теплового движения полной ориентации молекул-диполей нет.

3) Ионные диэлектрики и ионная поляризация

В твёрдых диэлектриках с ионной кристаллической решёткой (например, *NaCl*) ионы во внешнем поле слегка смещаются в противоположные стороны: положительные – по полю, отрицательные – против поля (рис.12.3).

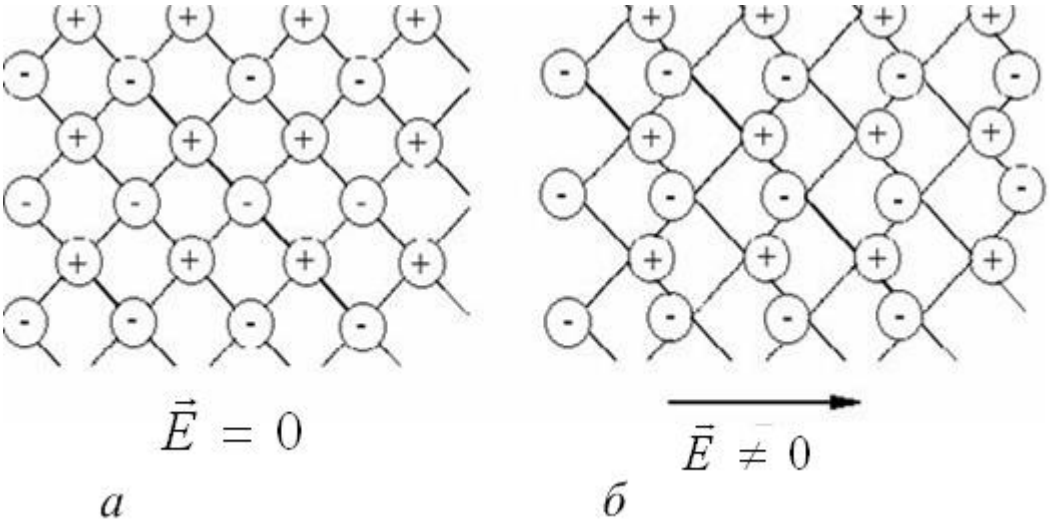


Рис.12.3

4) Есть ещё **сегнетоэлектрики**, но о них в этом курсе мы говорить не будем. О них можно прочитать в лабораторной работе 2-02 «Изучение электрических свойств сегнетоэлектриков».

2. Вектор поляризации

В любом случае во внешнем электрическом поле вещество поляризуется – приобретает дипольный момент.

Определение: **суммарный дипольный момент единицы объёма вещества называется вектором поляризации:**

$$\vec{P} = \frac{\sum\limits_i \vec{p}_{молекул}}{\Delta V}. \qquad (12.3)$$

Объём ΔV :

- с одной стороны, должен быть достаточно мал, чтобы заметить отличия в поляризации в разных точках объёма образца, а не считать среднее $\vec{P}$, например, по всему образцу;
- с другой стороны, нельзя брать ΔV бесконечно малым, иначе в него может войти слишком мало частиц: вычислять $\vec{P}$, например, для одного атома, или двух, или для десяти, бессмысленно.

Для большинства диэлектриков вектор поляризации вещества пропорционален внешнему полю: $\vec{P} \sim \vec{E}$ (в не очень сильных полях). Докажем это для неполярных диэлектриков. Просуммируем векторно дипольные моменты $\vec{p}_e = \varepsilon_0 \cdot \beta \cdot \vec{E}$ всех N молекул, находящихся в объёме ΔV и вычислим $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \frac{\sum\limits_i \vec{p}_{молекул}}{\Delta V} = \frac{N \cdot \vec{p}_e}{\Delta V} = \frac{N \cdot \varepsilon_0 \cdot \beta \cdot \vec{E}}{\Delta V} = \varepsilon_0 n \cdot \beta \cdot \vec{E},$$

где $n = \frac{N}{\Delta V}$ – концентрация молекул (число молекул в единице объёма). Введём новую величину – ***диэлектрическую восприимчивость***:

$$\aleph = n \cdot \beta, \tag{12.4}$$

тогда

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \aleph \cdot \vec{E}}. \tag{12.5}$$

Диэлектрическая восприимчивость безразмерна: $[\aleph] = [n \cdot \beta] = \frac{1}{м^3} \cdot м^3 = 1$.

На самом деле с поляризуемостью и диэлектрической восприимчивостью не всё так просто.

○ ***Во первых***, кристаллическое тело в общем случае анизотропно: свойства в различных направлениях различны. Например, вдоль длинных цепей полимерных молекул электронное облако во внешнем поле смещается сильнее, чем поперёк, то есть $\beta_\perp < \beta_\parallel$: наблюдается анизотропия поляризуемости. Диэлектрическая восприимчивость $\aleph$ также разная в разных направлениях, и (12.5) неверно; даже направления векторов $\vec{P}$ и $\vec{E}$ не будут совпадать. Для описания поляризации вещества в этом случае вводят тензор поляризуемости, но об этом мы говорить не будем.

○ ***Во вторых***, есть существенная разница, находится диэлектрик в постоянном электрическом поле или переменном, и какова частота, с которой изменяется величина $\vec{E}$. В зависимости от частоты величина $\aleph$ будет разной: наблюдается дисперсия. Это можно объяснить для ориентационной поляризации полярных диэлектриков, например, тем, что на больших частотах из-за вязкости среды молекулы просто не успевают переориентироваться при изменениях поля.

○ ***В третьих***, диэлектрическая восприимчивость полярных диэлектриков зависит от температуры, так как тепловое движение мешает диполям ориентироваться. Можно считать, что $\aleph$ обратно пропорциональна абсолютной температуре:

$$\aleph \sim \frac{1}{T}.$$

3. Электростатическое поле в диэлектрике

В результате поляризации диэлектрика, помещенного в однородное электрическое поле, в тонких слоях на его поверхности возникают

нескомпенсированные связанные поверхностные поляризационные заряды σ′ (рис.12.4), а в неоднородном электрическом поле могут возникать еще и объемные поляризационные заряды. По принципу суперпозиции напряженность электрического поля в диэлектрике $\vec{E}$ будет определяться векторной суммой напряженности внешнего электрического поля $\vec{E}_0$ (поле в вакууме) и напряженности поля $\vec{E}'$, обусловленного нескомпенсированными поляризационными зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \qquad (12.6)$$

Для изотропного диэлектрика, помещенного в однородное внешнее электрическое поле, эти векторы направлены в противоположные стороны, поэтому

$$E = E_0 - E', \qquad (12.7)$$

то есть напряженность электрического поля в диэлектрике меньше напряженности этого поля в вакууме.

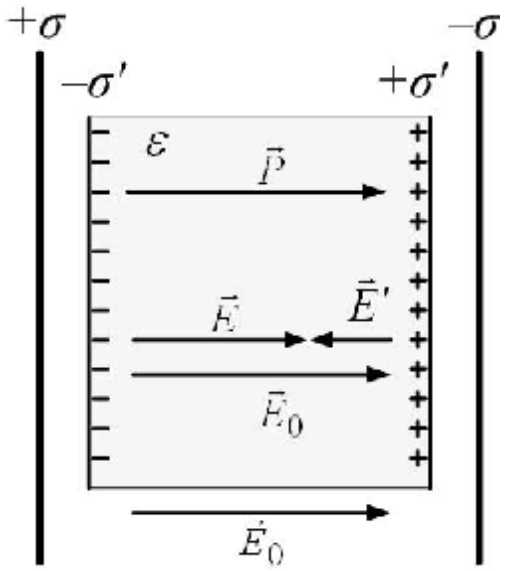


Рис.12.4

Напряженность поля связанных зарядов можно выразить через поверхностную плотность связанных зарядов (аналогично напряженности поля конденсатора):

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \qquad (12.8)$$

Поляризованность диэлектрика по определению (12.3) равна:

$$P = \frac{p_e}{V} = \frac{q'l}{V} = \frac{\sigma' Sl}{Sl} = \sigma', \qquad (12.9)$$

где $q'=\sigma' S$ – величина связанного поляризационного заряда на всей поверхности диэлектрика, S – площадь поверхности диэлектрика (площадь обкладки конденсатора), l – расстояние между обкладками (толщина диэлектрика), $q'l$ – электрический дипольный момент связанных зарядов, $V=Sl$ – объем диэлектрика. (Предполагаем, что диэлектрик занимает весь объем конденсатора.)

Из (12.5)-(12.9) получим:

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{\aleph \varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} = E_0 - \aleph E,$$

откуда, решая уравнение $E = E_0 - \aleph E$, найдем:

$$E(1+\aleph) = E_0.$$

Обозначим

$$\varepsilon = 1 + \aleph, \qquad (12.10)$$

тогда

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}. \qquad (12.11)$$

Величину ε, численно равную отношению напряженности электрического поля в вакууме E_0 к напряженности того же поля в диэлектрической среде E,

называют ***диэлектрической проницаемостью среды***. Или иначе: **диэлектрическая проницаемость ε показывает, во сколько раз напряжённость электростатического поля уменьшается в диэлектрике по сравнению с вакуумом.**

Согласно (12.10), $\varepsilon \geq 1$ (ε=1 для вакуума). Для стекла $\varepsilon \approx 5$; для воды при 20^0C $\varepsilon = 81$.

Диэлектрическая проницаемость неполярных диэлектриков уменьшается с повышением температуры, поскольку $\varepsilon = 1 + \aleph$ и $\aleph \sim \frac{1}{T}$.

4. Вектор электрического смещения

Для описания электрического поля применяют вспомогательную величину – вектор электрического смещения $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}. \qquad (12.12)$$

В диэлектрической среде он равен:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \frac{E_0}{E}\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_0, \qquad (12.13)$$

так как $\varepsilon = \frac{E_0}{E}$; E_0 – поле в вакууме, то есть поле свободных зарядов.

В вакууме по определению $\varepsilon = 1$, а напряжённость поля $\vec{E} \equiv \vec{E}_0$, то есть $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = 1 \cdot \varepsilon_0\vec{E}_0$. Снова получили (12.13). Именно этим удобен вектор электрического смещения $\vec{D}$: он одинаков в вакууме и в диэлектрике.

Вектор $\vec{D}$ описывает поле только свободных зарядов, распределение которых в конкретных задачах обычно известно. Вектор же напряжённости поля $\vec{E}$ описывает суммарное поле свободных и связанных (индуцированных) зарядов, возникших на границе диэлектрика (а в случае неоднородной поляризации – и в объёме тоже) в результате поляризации. Распределение этих зарядов бывает найти не так-то просто. Вектор $\vec{D}$ оказывается удобнее для описания поля во многих задачах. Линии вектора $\vec{D}$ начинаются и заканчиваются только на свободных зарядах (или в ∞), но не на связанных; а линии вектора $\vec{E}$ прерываются и свободными, и связанными зарядами (рис.12.5).

Получим ещё одно полезное соотношение для вектора $\vec{D}$.

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = (\aleph + 1)\varepsilon_0\vec{E} = \aleph\varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\vec{E} = \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E}}. \qquad (12.14)$$

Это соотношение является более общим, чем введённое выше (12.12) и может быть использовано в том случае, когда вектор поляризации диэлектрика $\vec{P}$ непараллелен напряжённости поля $\vec{E}$ (рис.12.6). Так что в качестве соотношения, определяющего, что такое вектор электрического смещения $\vec{D}$, будем считать не (12.12), а (12.14).

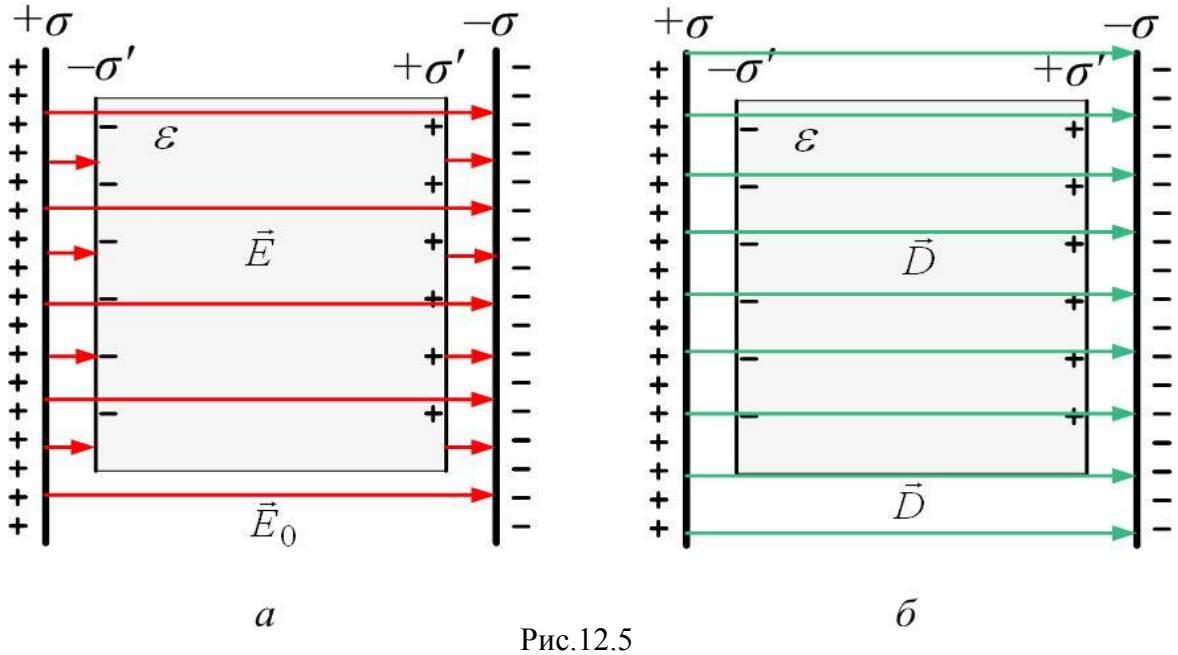


Рис.12.5

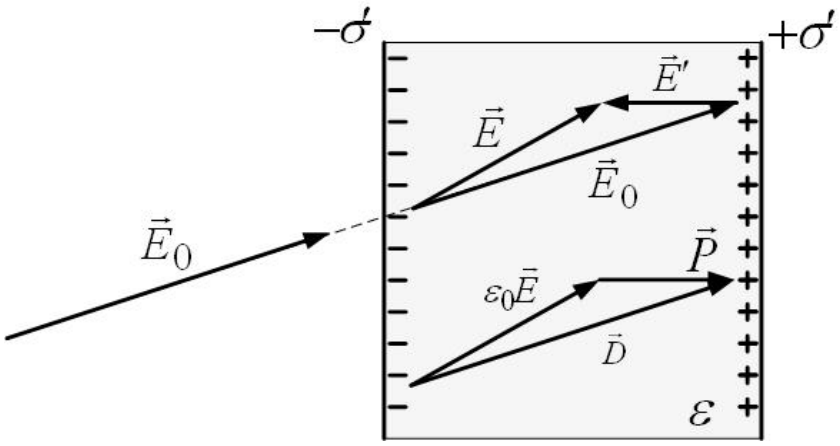


Рис.12.6

5. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

Найдём поток вектора $\vec{D}$ через произвольную замкнутую поверхность, используя (12.13)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_0$$

и применив теорему Гаусса (лекция 10) для поля $\vec{E}_0$ свободных зарядов

$$\oint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i^{свободн.}:$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S \varepsilon_0 \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \oint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i^{свободн.}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i^{свободн.} \qquad (12.15)$$

Это – ***теорема Гаусса для вектора электрического смещения:*** **поток вектора электрического смещения $\vec{D}$ через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, охваченных этой поверхностью.** Теорему Гаусса в таком виде удобно использовать, если распределение связанных поляризационных зарядов неизвестно.

Из (12.12) $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ можно получить выражения для потока вектора $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность. В (12.16) поляризационные заряды учитывает автоматически с помощью диэлектрической проницаемости ε; а (12.17) можно применять, если распределение поляризационных связанных зарядов известно.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_i q_i^{свободн.} \qquad (12.16)$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i (q_i^{свободн.} + q_i^{связ.}) \qquad (12.17)$$

Из (12.14), (12.15) и (12.17) можно получить полезные соотношения:

$$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E} \qquad \Rightarrow \qquad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S \vec{P} d\vec{S} + \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S}$$

$$\sum_i q_i^{свободн.} = \oint_S \vec{P} d\vec{S} + \varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\sum_i q_i^{свободн.} + q_i^{связ.} \right)$$

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -\sum_i q_i^{связ.}$$

Поток вектора поляризации определяется суммой связанных зарядов, охваченных замкнутой поверхностью.

6. Формулы для поля в диэлектрике

Краткий итог для поля в диэлектрике с учётом диэлектрической проницаемости среды:

$\vec{F} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon \cdot r^3}\vec{r}$ – закон Кулона

$E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon \cdot r^2}$ – напряженность поля точечного заряда

$E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$ – напряженность поля плоскости

$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ – напряженность поля конденсатора

$E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon \cdot r}$ – напряженность поля нити (цилиндра при $r>R$, R – радиус цилиндра)

$\oint\limits_S E\cos\alpha dS = \dfrac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum\limits_i q_i^{свободн.} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum\limits_i (q_i^{свободн.} + q_i^{связ.})$, $\oint\limits_S D\cos\alpha dS = \sum\limits_i q_i^{свободн.}$ – теорема Гаусса

$W = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon \cdot r}$ – энергия взаимодействия точечных зарядов

$\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon \cdot r}$ – потенциал поля точечного заряда.

7. Проводники в электростатическом поле

Поместим проводник в электростатическое поле (рис.12.7, а). На свободные заряды проводника со стороны поля действует сила, смещающая заряды. Электроны в металле движутся против поля из точек с меньшим потенциалом в точки с б*о*льшим потенциалом; тем самым разность потенциалов выравнивается, заряды смещаться перестают. Это равновесное распределение зарядов в проводнике при помещении его в электростатическое поле устанавливается очень быстро, так что в состоянии равновесия разность потенциалов любых двух точек проводника равна нулю. Потенциал проводника всюду (внутри и на поверхности проводника) одинаков:

$$\varphi_{\text{проводника}} = const \ . \qquad (12.18)$$

Отсюда следует, что электростатического поля внутри проводника нет:

$$\vec{E} = -grad\varphi = -grad\left(const\right) = 0 \, . \qquad (12.19)$$

Внутри проводника нет объёмных нескомпенсированных зарядов; заряды могут быть только на поверхности проводника. Это легко доказать с помощью теоремы Гаусса: если гауссова поверхность целиком лежит внутри проводника, то поток вектора $\overline{E}$ через неё есть ноль, поскольку $\vec{E} = 0$, значит

$$\oint\limits_S \overline{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i = 0 \, .$$

Поверхность проводника – эквипотенциальная, поэтому линии напряжённости к ней перпендикулярны (рис.12.7, б), а индуцированные на поверхности проводника свободные заряды разрывают линии напряжённости, так что внутри проводника поля нет.

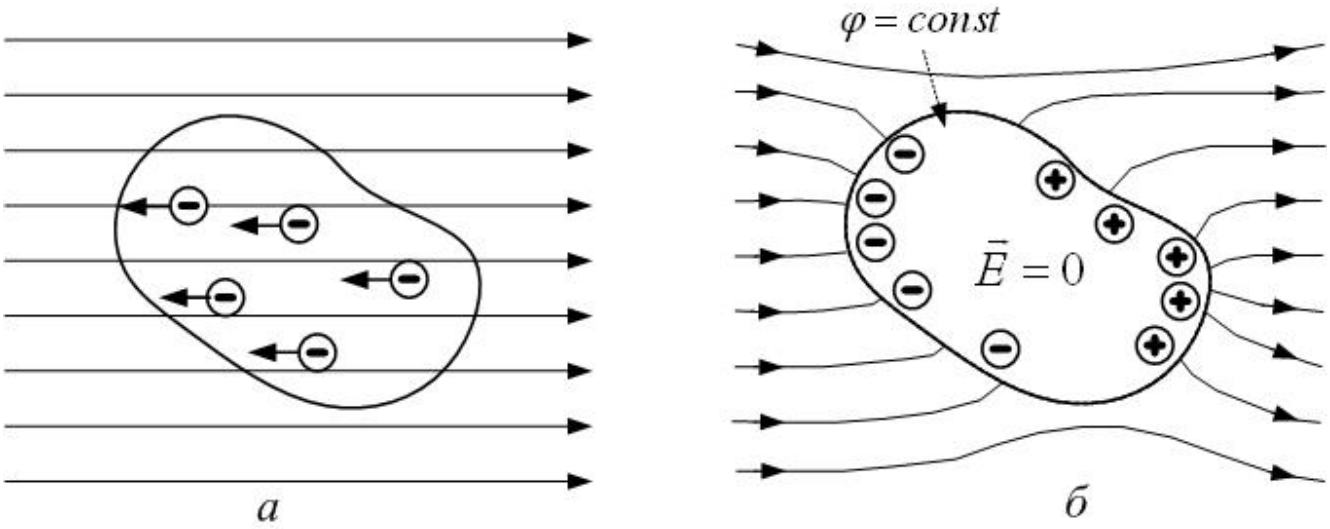


Рис.12.7

Проводник может быть полым, – это несущественно, всё равно поля внутри объёма, ограниченного проводником, не будет (рис.12.8). На этом и основан принцип экранирования от внешних полей.

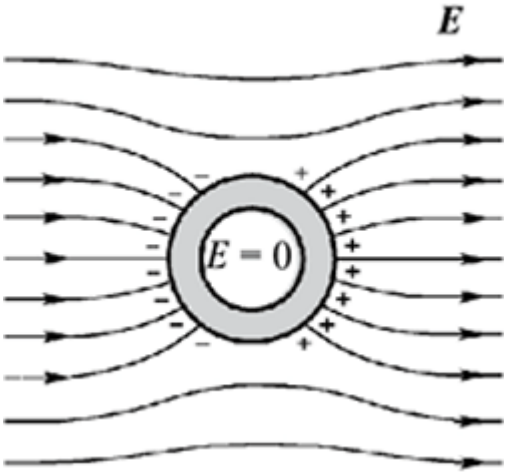


Рис.12.8

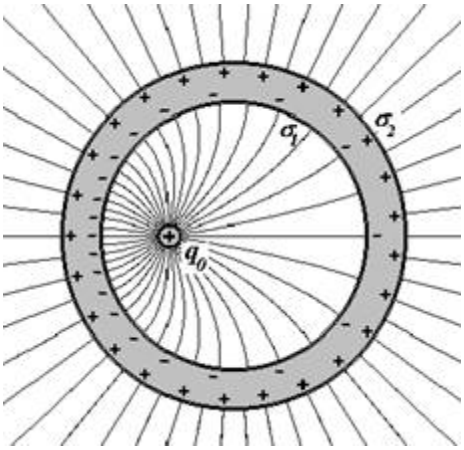


Рис.12.9

Однако если внутри полости поместить заряды, то поле в ней, конечно, будет (рис.12.9). Линии поля разрываются толщей проводника и дальше уходят на бесконечность – поля нет ***в толще*** проводника.

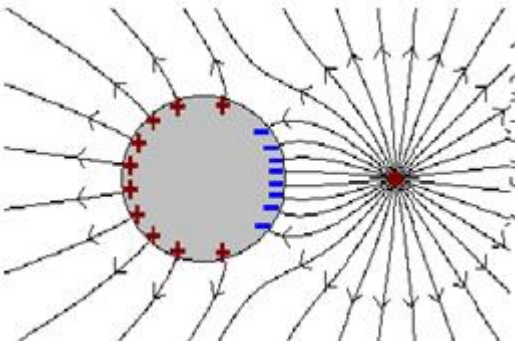


Рис.12.10

Рис.12.10 даёт представление о распределении зарядов, индуцированных на поверхности сферического проводника положительным точечным зарядом. Такое явление называется ***электростатической индукцией***.

Найдём напряжённость поля вблизи поверхности проводника, поверхностная

плотность заряда которой равна σ, по теореме Гаусса для вектора электрического смещения (12.15):

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i^{свободн.} .$$

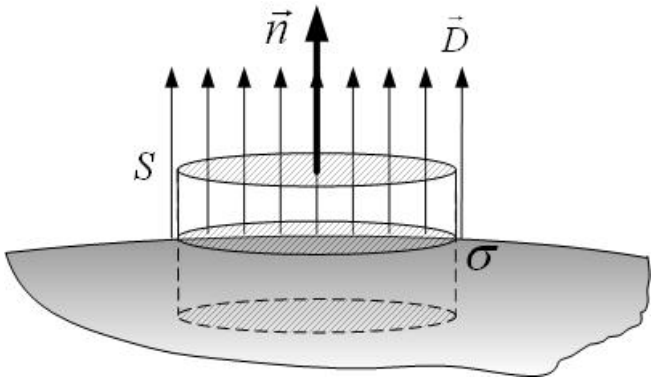


Рис.12.11

В качестве гауссовой поверхности возьмём достаточно малый цилиндр, основания которого площадью *S* параллельны поверхности проводника, а образующие перпендикулярны ей (рис.12.11). Поток вектора $\vec{D}$ равен нулю как через боковую поверхность (линии $\vec{D}$ к ей параллельны), так и через основание, находящееся в проводнике (там поля нет, $\vec{D} = 0$). Из-за малости *S* поток через внешнее основание, перпендикулярное линиям $\vec{D}$, равен $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot S$.

Суммарный заряд внутри объёма, ограниченного поверхностью, – это заряд кусочка поверхности площадью *S* и равен $\sum_i q_i^{свободн.} = \sigma \cdot S$, тогда

$$D \cdot S = \sigma \cdot S$$

$$\boxed{D = \sigma} . \quad (12.20)$$

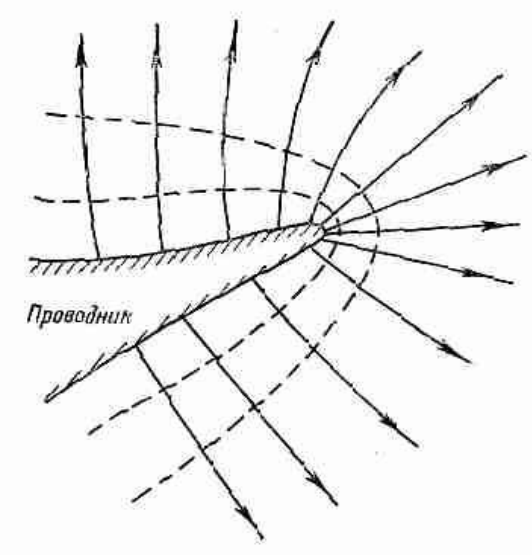


Рис.12.12

Вблизи поверхности проводника величина вектора $\vec{D}$ равна поверхностной плотности заряда.

Соответственно,

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} .$$

Электрические заряды по поверхности проводника распределяются неравномерно: поверхностная плотность заряда больше на выпуклостях и меньше на впадинах. Линии напряжённости всегда перпендикулярны эквипотенциальной поверхности проводника и сгущаются на острие, где зарядов больше (рис.12.12) .

8. Электроёмкость проводника

Рассмотрим уединённый заряженный проводник. Как было показано, потенциал φ любой его точки одинаков. Потенциал проводника прямо пропорционален заряду: $\varphi \sim q$, а коэффициент пропорциональности – это, по определению, ёмкость проводника:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \qquad (12.21)$$

Электроемкость уединенного проводника показывает, какой заряд нужно сообщить данному проводнику, чтобы его потенциал изменился на единицу. Единицей электроемкости в системе СИ является 1 фарад – это электроемкость такого проводника, потенциал которого при сообщении заряда в 1 кулон изменяется на 1 вольт:

$$[C] = \frac{[q]}{[\varphi]} = \frac{Кл}{В} = Ф.$$

Найдём ёмкость проводящей сферы радиуса R, окружённой безграничной диэлектрической средой. Потенциал поля такой сферы (см.лекцию №11) вне сферы ($r \geq R$):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

На поверхности сферы ($r = R$)потенциал равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R},$$

тогда её ёмкость

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{q}{q/(4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R)} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R.$$

$$C_{\text{сферы}} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R. \qquad (12.22)$$

Электроемкость проводника зависит от его размеров, формы, наличия по соседству других проводников и от диэлектрической проницаемости среды.

Если недалеко от заряженного проводника находится другой проводник, то из-за явления электростатической индукции ёмкость проводника меняется (возрастает): заряды на незаряженном проводнике перераспределяются так, что потенциал неуединённого проводника меньше, чем уединённого. Проще говоря, проводники влияют друг на друга.

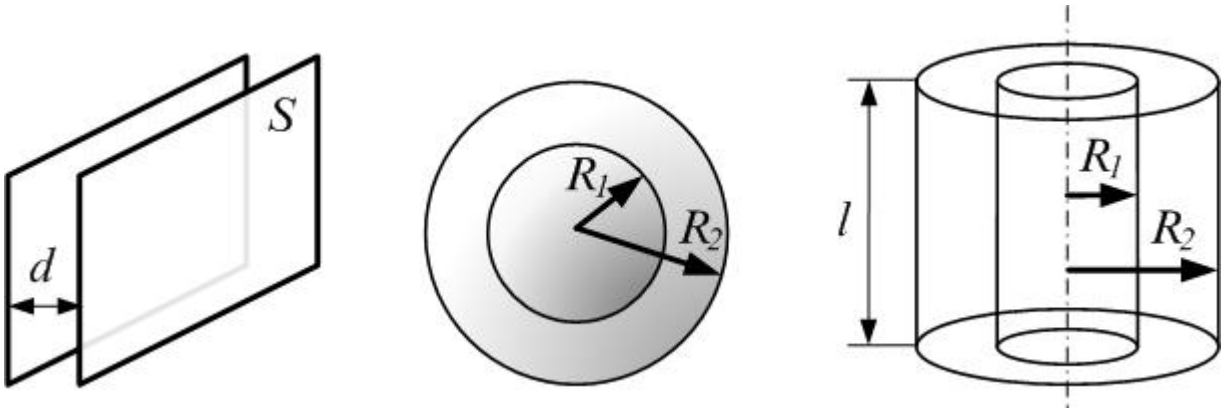
9. Конденсаторы. Ёмкость конденсатора

Конденсатор – это два проводника (две обкладки), находящихся вблизи друг друга. Обкладки имеют одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды. Взаимная ёмкость (или просто ёмкость) конденсатора определяется формулой (12.23):

$$C = \frac{q}{U}, \qquad (12.23)$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов обкладок.

Ёмкость конденсатора численно равна заряду, который нужно ему сообщить, чтобы разность потенциалов обкладок (напряжение на конденсаторе) было равно 1 вольту. Ёмкость зависит от формы, размеров обкладок, их взаимного расположения и диэлектрической проницаемости среды.



а б в

Рис.12.13

Найдём ёмкость плоского конденсатора (рис.12.13,а).

$$C_{\text{пл.}} = \frac{q}{U} = \frac{q}{E \cdot d} = \frac{\sigma \cdot S}{\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \cdot S}{d}. \qquad (12.24)$$

Для вычисления разности потенциалов на обкладках сферического конденсатора (рис.12.13,б) воспользуемся формулой связи напряженности электростатического поля и потенциала:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r}\,.$$

Интегрировать здесь будем по радиус-вектору, проведенному от внутренней обкладки к внешней (рис.12.14). Вектор напряженности поля направлен радиально (в силу симметрии), тогда

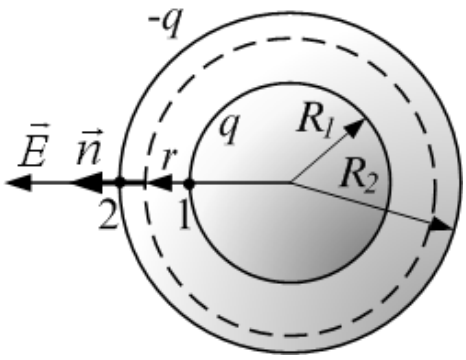


Рис.12.14

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr\,. \qquad (12.25)$$

Напряженность поля между обкладками можно найти по теореме Остроградского-Гаусса (см.лекцию № 10), согласно которой **поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, охваченных поверхностью, деленной на** $\varepsilon\varepsilon_0$:

$$\oint_S E\cos\alpha dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_i q_i^{\text{свободн.}}\,. \qquad (12.26)$$

В качестве Гауссовой поверхности в нашем случае следует взять сферу, концентрическую обкладкам, радиусом r: $R_1<r<R_2$ (рис.12.14). Из-за симметрии напряженность поля в любой точке сферы одинакова и совпадает по направлению с нормалью к поверхности в данной точке, и величину E можно вынести из под знака интеграла в (12.26), а $\cos\alpha = 1$. В правой части (12.26) суммарный заряд, охваченный Гауссовой поверхностью, – это заряд внутренней обкладки, то есть заряд конденсатора q. Тогда

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (12.27)$$

Здесь учтено, что $\oint\limits_S dS = 4\pi r^2$ – площадь сферы. Выразив E из (12.27) и подставив в (12.25), получим:

$$U = \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R_1}^{R_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

откуда

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)},$$

$$C_{\text{сфер.}} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)}. \qquad (12.28)$$

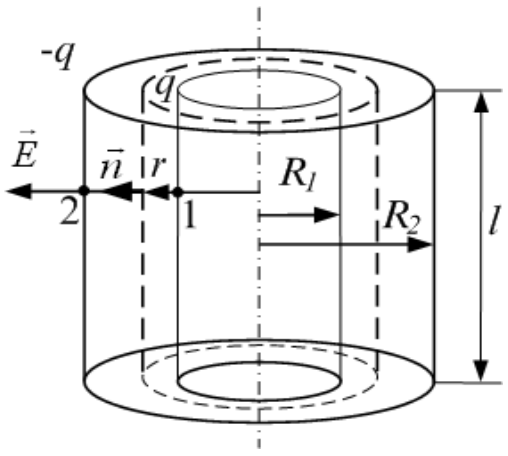


Рис.12.15

Аналогично для ёмкости цилиндрического конденсатора (рис.12.13,в) по теореме Гаусса:

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

В качестве Гауссовой поверхности взяли цилиндр, коаксиальный обкладкам цилиндрического конденсатора, радиусом r ($R_1 < r < R_2$) и длиной l (рис.12.15).

$$U = \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r l} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l} \cdot (\ln r)\Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}(\ln R_2 - \ln R_1)$$

$$U = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l} \ln\frac{R_2}{R_1},$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\dfrac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l} \ln\dfrac{R_2}{R_1}}$$

$$C_{\text{цил.}} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}. \qquad (12.29)$$

При параллельном соединении конденсаторов (рис.12.16) напряжение на них одинаково и равно общему: $U_1 = U_2 = U$, а заряды складываются:

$$q = q_1 + q_2,$$

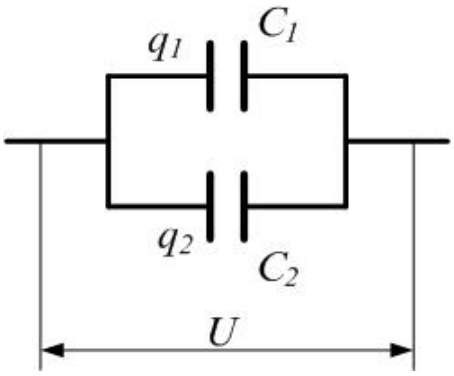


Рис.12.16

причём

$$q = C_{\text{общ.}}U$$
$$q_1 = C_1U$$
$$q_2 = C_2U,$$

Отсюда

$$C_{\text{общ.}}U = C_1U + C_2U$$
$$C_{\text{общ.}} = C_1 + C_2.$$

При последовательном соединении одинаковы заряды, а напряжения складываются (рис.12.17):

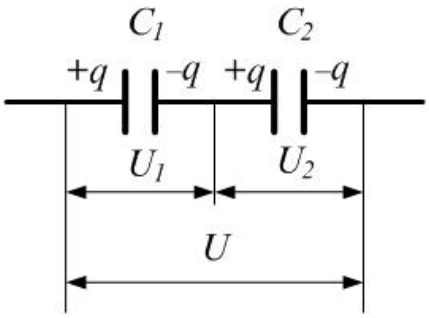


Рис.12.17

$$U = U_1 + U_2,$$

$$U = \frac{q}{C_{\text{общ.}}}, \qquad U_1 = \frac{q}{C_1}, \qquad U_2 = \frac{q}{C_2}.$$

$$\frac{q}{C_{\text{общ.}}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2},$$

$$\frac{1}{C_{\text{общ.}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \qquad (12.30)$$

10. Энергия заряженного проводника (конденсатора)

Будем заряжать уединённый проводник, перемещая из бесконечности на него заряд dq (рис.12.18).

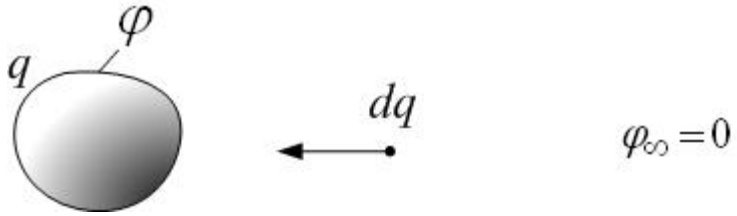


Рис.12.18

Работа внешних сил по переносу этого заряда равна произведению заряда на разность потенциалов точек, между которыми переносили заряд

$$dA = dq \cdot \Delta\varphi \qquad (12.31)$$

и идёт на увеличение энергии проводника

$$dA = dW.$$

На бесконечности потенциал равен нулю; потенциал проводника в процессе зарядки меняется и равен φ; тогда $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_\infty = \varphi$. Отсюда

$$dW = \varphi \cdot dq .$$

При этом потенциал проводника увеличивается пропорционально возросшему заряду проводника (12.21):

$$d\varphi = \frac{dq}{C} .$$

Здесь C – ёмкость проводника. Тогда

$$dW = \varphi \cdot C d\varphi . \qquad (12.32)$$

Интегрируем (12.32) при условии, что вначале проводник был не заряжен и не обладал энергией (за начало отсчёта энергии приняли состояние незаряженного проводника):

$$\int_0^W dW = \int_0^\varphi \varphi \cdot C d\varphi$$

$$W = C \cdot \int_0^\varphi \varphi \cdot d\varphi$$

$$\boxed{W = \frac{C\varphi^2}{2}} \qquad (12.33)$$

Поскольку $\varphi = \frac{q}{C}$, то:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{C\left(\frac{q}{C}\right)^2}{2} = \frac{Cq^2}{2C^2}$$

$$\boxed{W = \frac{q^2}{2C}}, \qquad (12.34)$$

или:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{(C\varphi)\varphi}{2} = \frac{q\varphi}{2}$$

$$\boxed{W = \frac{q\varphi}{2}} \qquad (12.35)$$

Аналогично можно получить для конденсатора:

$$\boxed{W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}} \qquad (12.36)$$

11. Объёмная плотность энергии электростатического поля

Важен вопрос о локализации энергии: ***энергия электростатического поля*** проводника или конденсатора ***локализована*** не в проводнике или заряженных обкладках конденсатора, а ***в той области пространства, где создано электростатическое поле***.

Вычислим объёмную плотность энергии электростатического поля. Напоминание: объёмной плотностью энергии называется энергия единицы объёма пространства, или отношение энергии dW, локализованной в объёме dV, к этому объёму:

$$w = \frac{dW}{dV}. \tag{12.37}$$

В плоском конденсаторе ёмкостью $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ поле однородно и занимает весь объём $V = S \cdot d$, а разность потенциалов обкладок $U = E \cdot d$.

Тогда

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S(Ed)^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \cdot Sd \cdot E^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \cdot V \cdot E^2}{2},$$

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$$

Поскольку величина вектора электрического смещения равна $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, то

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}} \qquad w = \frac{ED}{2} \tag{12.38}$$

Полученную формулу можно использовать и для неоднородных полей.

Лекция 4 (13)

Электрический ток

План

1. Электрический ток и его характеристики. Основные определения
   1.1. Сила тока
   1.2. Плотность тока
   1.3. Электродвижущая сила
   1.4. Напряжение
2. Закон Ома
3. Правила Кирхгофа для разветвлённых цепей
   3.1. Первое правило Кирхгофа
   3.2. Второе правило Кирхгофа
4. Закон Джоуля-Ленца (в интегральной и локальной форме)
5. Процессы заряда и разряда конденсатора
   5.1. Заряд конденсатора
   5.2. Разряд конденсатора
6. Основы классической электронной теории проводимости металлов
7. Термоэлектронная эмиссия

1. Электрический ток и его характеристики

1.1. Сила тока

Электрический ток – направленное движение зарядов (заряженных частиц или заряженных тел; в последнем случае ток называется конвекционным). Введём определение **силы тока** как **отношение заряда, прошедшего через сечение проводника, к промежутку времени, за которое заряд был перенесён**:

$$I = \frac{dq}{dt} \ . \qquad (13.1)$$

Сила тока – производная заряда по времени. Только в случае, когда ток постоянный, можно использовать формулу $I = \frac{q}{\Delta t}$, в которой, тем не менее, в знаменателе стоит промежуток времени.

Физический смысл силы тока: **сила тока численно равна заряду, проходящему через сечение проводника за единицу времени**. Единицей силы тока является ампер:

$$[I] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{Кл}{c} = A \, .$$

Ампер – основная единица системы единиц СИ.

1.2. Плотность тока

Плотность тока – это сила тока, приходящаяся на единицу сечения проводника:

$$j = \frac{dI}{dS}. \qquad (13.2)$$

Размерность плотности тока

$$[j] = \frac{[I]}{[S]} = \frac{A}{м^2}$$

Плотность тока, в отличие от силы тока, величина векторная. Направление вектора плотности тока в данной точке совпадает с направлением движения положительных зарядов (или противоположно направлению движения отрицательных). В общем случае в разных точках сечения проводника плотность тока может быть различной как по величине, так и по направлению, поэтому сила тока через сечение – это интеграл по площади сечения S:

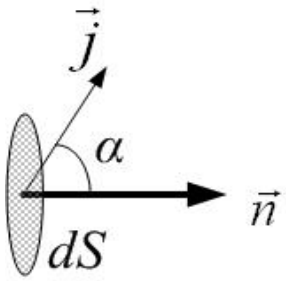


Рис.13.1

$$I = \int_S dI = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S j \cdot \cos\alpha \cdot dS \ , \qquad (13.3)$$

где α – угол между нормалью к элементарной площадке dS и вектором плотности тока $\vec{j}$ (рис.13.1).

Есть ещё одно полезное выражение для плотности тока. Пусть $\vec{v}$ – средняя скорость направленного движения заряженных частиц, n – их концентрация, q_0 – заряд каждой частицы. За время dt до сечения S дойдут частицы, находившиеся от сечения не дальше, чем на расстоянии $v \cdot dt$, то есть в объёме $S \cdot v \cdot dt$ (рис.13.2). Число таких частиц $dN = n \cdot dV$, а их суммарный заряд

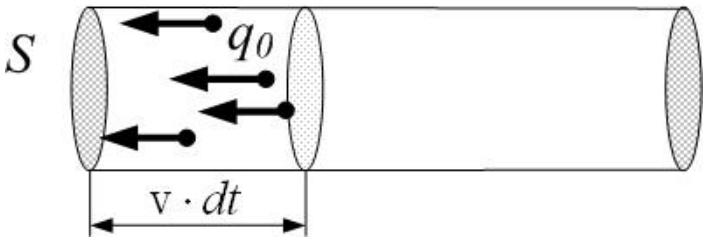


Рис.13.2

$$dq = q_0 \cdot dN,$$
$$dq = q_0 \cdot n \cdot dV,$$
$$dq = q_0 \cdot n \cdot S \cdot v \cdot dt.$$

Сила тока:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{q_0 \cdot n \cdot S \cdot v \cdot dt}{dt} = q_0 \cdot n \cdot S \cdot v.$$

Плотность тока:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{q_0 \cdot n \cdot S \cdot v}{S} = q_0 \cdot n \cdot v.$$

Окончательно:

$$\vec{j} = q_0 \cdot n \cdot \vec{v}, \qquad (13.4)$$

так как направления векторов $\vec{j}$ и $\vec{v}$ совпадают.

1.3. Электродвижущая сила (ЭДС)

Если в проводнике есть только электростатические силы, то под их действием заряды очень быстро перераспределятся, так что разность потенциалов любых точек проводника выравняется, и направленное движение зарядов в

проводнике прекратится. Для того чтобы ток в проводнике поддерживался, электростатических сил недостаточно. Нужны неэлектростатические силы; их называют ***сторонними.*** Именно они действуют в источниках тока, разделяя положительные и отрицательные заряды. Сторонние силы направлены в источнике противоположно кулоновским (электростатическим). Природа этих сил может быть различна, например, в аккумуляторах это химические силы, в электрогенераторах – электромагнитные.

Возьмём простейшую замкнутую цепь (рис.13.3), состоящую из источника тока $\mathcal{E}$ (ЭДС) и нагрузки R (резистора). По определению, ***ЭДС источника – это работа сторонних сил по переносу единичного заряда*** в замкнутой цепи (или на участке цепи, содержащем источник):

$$\mathcal{E} = \frac{A_{стор.}}{q}. \qquad (13.5)$$

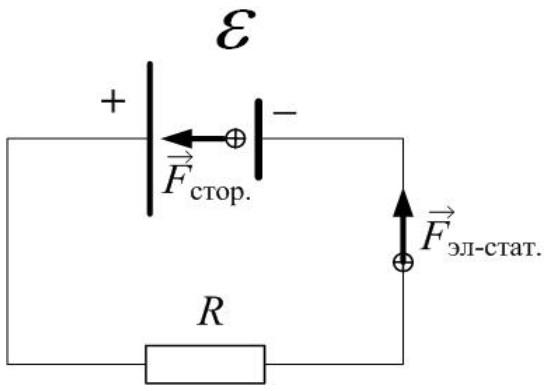


Рис.13.3

Введём напряжённость поля сторонних сил $\vec{E}_{стор.}$ по аналогии с напряжённостью электростатического поля:

$$\vec{E}_{стор.} = \frac{\vec{F}_{стор.}}{q},$$

$$\vec{F}_{стор.} = q \cdot \vec{E}_{стор.}, \qquad (13.6)$$

и вычислим работу сторонних сил при переносе заряда q на участке цепи от точки 1 до точки 2:

$$A_{стор.12} = \int_1^2 dA_{стор.} = \int_1^2 \vec{F}_{стор.} d\vec{l} = \int_1^2 q \cdot \vec{E}_{стор.} d\vec{l} = q \cdot \int_1^2 \vec{E}_{стор.} d\vec{l}.$$

Тогда из (13.5):

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{стор.} d\vec{l}. \qquad (13.7)$$

Если контур замкнут (1=2),

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_{стор.} d\vec{l}. \qquad (13.8)$$

Напряжённость суммарного поля кулоновских (электростатических) и сторонних сил равна

$$\vec{E} = \vec{E}_{кул.} + \vec{E}_{стор.};$$

полная сила, действующая на заряд:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = q \cdot \left(\vec{E}_{кул.} + \vec{E}_{стор.}\right),$$

а работа суммарной силы при переносе заряда на участке цепи

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \cdot \int_1^2 \left(\vec{E}_{кул.} + \vec{E}_{стор.}\right) \cdot d\vec{l};$$

$$A_{12} = q \cdot \int_1^2 \vec{E}_{\text{кул.}} d\vec{l} + q \cdot \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор.}} d\vec{l} \,. \qquad (13.9)$$

В (13.9) первый интеграл равен разности потенциалов (см.лекцию № 10):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}_{\text{кул.}} d\vec{l} \,, \qquad (13.10)$$

а второй – это ЭДС (13.7). Тогда

$$A_{12} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + q \cdot \mathcal{E}_{12} \,. \qquad (13.11)$$

1.4. Напряжение

Определение: **напряжение численно равно суммарной работе кулоновских и сторонних сил по переносу единичного заряда на данном участке цепи:**

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} \,. \qquad (13.12)$$

Тогда из (13.11) напряжение равно

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = \frac{q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + q \cdot \mathcal{E}_{12}}{q},$$

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12} \,. \qquad (13.13)$$

Частные случаи:

а) ***Контур замкнут*** (1=2), тогда $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, и напряжение в такой замкнутой цепи – это ЭДС:

$$U = \mathcal{E} \,.$$

б) Напряжение на ***однородном участке цепи*** (не содержащем ЭДС, $\mathcal{E} = 0$) равно разности потенциалов:

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) \,.$$

Понятие напряжения является обобщением понятий как ЭДС, так и разности потенциалов.

2. Закон Ома

Закон Ома для однородного участка цепи (установлен экспериментально): **сила тока прямо пропорциональна напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению**:

$$I = \frac{U}{R} \,. \qquad (13.14)$$

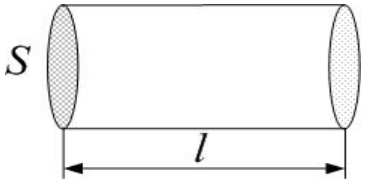


Рис.13.4

Сопротивление проводника пропорционально его длине и обратно пропорционально площади сечения (рис.13.4):

$$R = \rho \frac{l}{S}, \qquad (13.15)$$

здесь ρ – удельное сопротивление проводника. Для данного материала это постоянная величина. Удельное сопротивление зависит от температуры. Для

металлов эта зависимость линейная: с повышением температуры удельное сопротивление увеличивается (13.16):

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0(1+\alpha\cdot t), \\ R &= R_0(1+\alpha\cdot t) \end{aligned} \qquad (13.16)$$

Здесь R_0 (ρ_0) – сопротивление (удельное сопротивление) при температуре 0^0C, α – температурный коэффициент сопротивления. Подробнее о причинах зависимости сопротивления от температуры будет рассказано дальше.

Получим формулировку ***закона Ома в дифференциальной (локальной) форме*** из (13.2), (13.14) и (13.15):

$$\begin{cases} j = \dfrac{I}{S} \\ I = \dfrac{U}{R} \\ R = \rho\dfrac{l}{S} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad j = \frac{I}{S} = \frac{U}{SR} = \frac{U}{S\rho\dfrac{l}{S}} = \frac{U}{\rho\cdot l}.$$

Поле будем считать однородным, тогда $U = E\cdot l$.

$$j = \frac{U}{\rho\cdot l} = \frac{E\cdot l}{\rho\cdot l} = \frac{E}{\rho}. \qquad (13.17)$$

Введём определение. **Удельная электропроводимость γ – это величина, обратная удельному сопротивлению**:

$$\gamma = \frac{1}{\rho}. \qquad (13.18)$$

Тогда из (13.17):

$$\vec{j} = \gamma\cdot\vec{E}. \qquad (13.19)$$

Это – закон Ома в локальной форме: **плотность тока $\vec{j}$ прямо пропорциональная напряжённости поля $\vec{E}$**. Это – векторное соотношение; направления векторов плотности тока и напряжённости поля совпадают, независимо от того, какой знак у носителей тока.

Более того, этот закон справедлив также и для точек неоднородного участка цепи, только в качестве напряжённости поля должна стоять суммарная напряжённость поля сторонних и кулоновских сил:

$$\vec{j} = \gamma\cdot\left(\vec{E}_{\text{кул.}} + \vec{E}_{\text{стор.}}\right).$$

Аналогично, закон Ома в интегральной форме для неоднородного участка цепи получается заменой напряжения в (13.14) на (13.13):

$$I = \frac{U}{R} \equiv \frac{U_{12}}{R} = \frac{(\varphi_1-\varphi_2)+\mathcal{E}_{12}}{R}, \qquad (13.20)$$

или

$$IR = (\varphi_1-\varphi_2)+\mathcal{E}. \qquad (13.20\text{a})$$

3. Правила Кирхгофа для разветвлённых цепей

Сложные цепи, которые нельзя свести к простейшим элементам – параллельному и последовательному соединению проводников, описываются правилами Кирхгофа.

3.1. Первое правило

Определение: **узел – точка, в которой сходятся три или больше проводников** (рис.13.5).

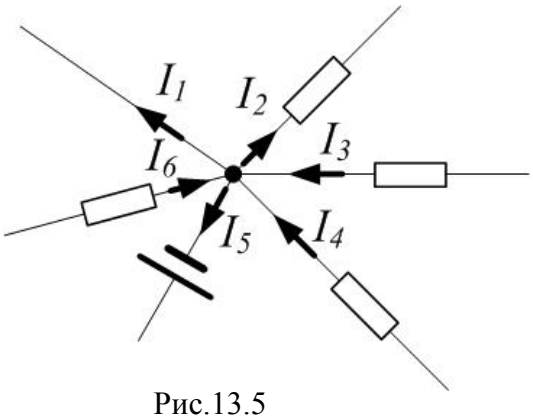


Рис.13.5

Первое правило: **Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.**

$$\sum_i I_i = 0\,. \qquad (13.21)$$

Правило знаков: **токи, заходящие в узел, надо брать с положительным знаком, выходящие из узла – с отрицательным**.

Это правило – следствие закона сохранения заряда: если токи постоянные, то заряд в узле накапливаться не должен; всё, что затекло, должно вытечь.

Пример (см.рис.13.5):

$$-I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5 + I_6 = 0\,.$$

Если в разветвлённой цепи N узлов, то по первому правилу нужно написать число уравнений, на одно уравнение меньше (N–1), так как уравнение, составленное для последнего узла, будет линейной комбинацией предыдущих и не даст ничего нового.

3.2. Второе правило

Второе правило – это обобщение (13.20а). Выберем любой замкнутый контур разветвлённой цепи и для каждого участка запишем соответствующее выражение:

$$(IR)_i = (\varphi_1 - \varphi_2)_i + \mathcal{E}_i\,,$$

а затем просуммируем полученные уравнения по всему замкнутому контуру. Сумма падений потенциала даст ноль (электростатическое поле потенциально):

$$\sum_i (\varphi_1 - \varphi_2)_i = \oint_L \vec{E}_{\text{кул.}} d\vec{l} = 0\,,$$

тогда

$$\sum_i (IR)_i = \sum_i \mathcal{E}_i\,. \qquad (13.22)$$

Это и есть второе правило Кирхгофа: **алгебраическая сумма напряжений на всех участках любого замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС, включенных в данный контур.**

Правило знаков: если направление тока на данном участке совпадает с направлением обхода контура, то произведение $(IR)_i$ в сумме (13.22) надо брать с положительным знаком; иначе – с минусом. Если ЭДС при обходе контура

проходим от минуса к плюсу, то $\mathcal{E}_i$ в сумме надо брать с плюсом; иначе – с минусом. В качестве примера см. рис.13.6 и уравнение (13.23); направление обхода контура – начиная от точки А по часовой стрелке.

$$I_5R_6 - I_4R_5 + I_3R_4 - I_2R_2 - I_1R_1 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3. \qquad (13.23)$$

Уравнения по второму правилу Кирхгофа нужно писать не для

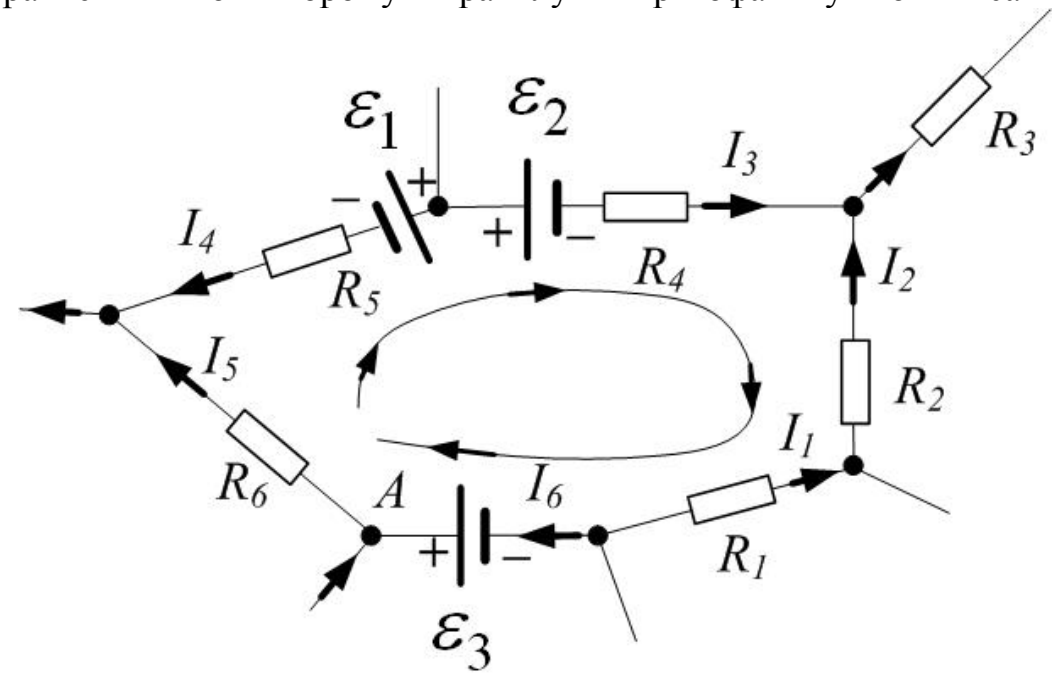


Рис.13.6

всевозможных контуров. Общее число уравнений (по I и по II правилам) равно числу ветвей (числу токов). Каждое новое уравнение по II правилу должно включать новый фрагмент цепи (новую ветвь), ещё не описанную вторым правилом. Если уравнений столько, сколько нужно, они перекроют всю цепь, и не останется ни одной не описанной ветки.

4. Закон Джоуля-Ленца (в интегральной и локальной форме)

Найдём работу тока за малый промежуток времени *dt* по переносу заряда $dq = I \cdot dt$ по проводнику сопротивлением *R*, на который подано напряжение *U* (рис.13.7):

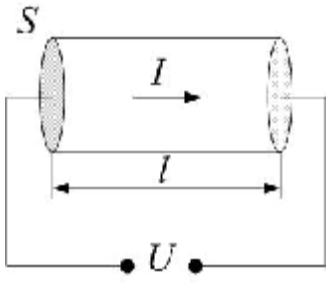


Рис.13.7

$$dA = dq \cdot U,$$

тогда

$$dA = dq \cdot U = I \cdot U \cdot dt.$$

$$dA = I \cdot U \cdot dt. \qquad (13.24)$$

Мощность тока равна:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{I \cdot U \cdot dt}{dt}$$

$$P = I \cdot U. \qquad (13.25)$$

Можно выразить по-другому, если воспользоваться законом Ома (13.14):

$$P = I \cdot U = I \cdot (I \cdot R) = I^2 R,$$

$$P = I \cdot U = \frac{U}{R} \cdot U = \frac{U^2}{R}.$$

Итак, полезная мощность тока (мощность, выделяющаяся на нагрузке R) равна

$$P = I \cdot U = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \qquad (13.25а)$$

Если работа тока сводится только к выделению теплоты, то

$$dA = dQ = IUdt, \qquad (13.26)$$

а теплота, выделившаяся за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, равна

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} dQ = \int_{t_1}^{t_2} IUdt. \qquad (13.27)$$

Это – ***закон Джоуля-Ленца в интегральной форме***, а теплота Q называется ленцджоулевой теплотой. Этот закон можно использовать и для переменного тока в том случае, когда есть сдвиг фаз между током и напряжением. Если сдвига фаз нет, но ток переменный, удобнее воспользоваться такой формулировкой:

$$Q = R \int_{t_1}^{t_2} I^2 dt. \qquad (13.27а)$$

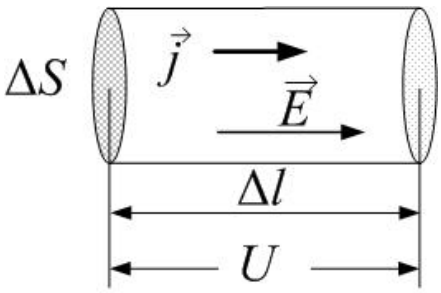


Рис.13.8

Теперь получим закон Джоуля-Ленца в дифференциальной (локальной) форме. Рассматривается проводник достаточно малого объёма $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta l$ (рис.13.8). Рассчитаем **удельную тепловую мощность тока** w, которая равна по определению (13.27) **количеству теплоты, выделяющемуся в единице объёма проводника за единицу времени**.

$$w = \frac{dQ}{dt \cdot \Delta V}. \qquad (13.28)$$

$$w = \frac{dQ}{dt \cdot \Delta V} = \frac{I \cdot U \cdot dt}{dt \cdot \Delta S \cdot \Delta l} = \frac{I \cdot U}{\Delta S \cdot \Delta l} = \frac{I}{\Delta S} \cdot \frac{U}{\Delta l} = j \cdot E,$$

так как плотность тока $j = \frac{I}{\Delta S}$, а напряжённость однородного поля связана с напряжением (разностью потенциалов) в проводнике: $E = \frac{U}{\Delta l}$.

Итак,

$$w = j \cdot E. \qquad (13.29)$$

С учётом закона Ома в локальной форме $j = \gamma \cdot E$ ($j = \frac{E}{\rho}$, $E = j \cdot \rho$) закон Джоуля-Ленца выглядит так:

$$w = j \cdot E = \gamma \cdot E^2. \qquad (13.30)$$

Или по-другому:

$$w = j \cdot E = j \cdot \left(j \cdot \rho\right) = \rho \cdot j^2 . \qquad (13.30a)$$

5. Процессы заряда и разряда конденсатора

Схема, изображённая на рис.13.9, позволяет исследовать процессы заряда конденсатора C через сопротивление R (ключ K в положении 1) и разряда (ключ K в положении 2).

5.1. Заряд конденсатора

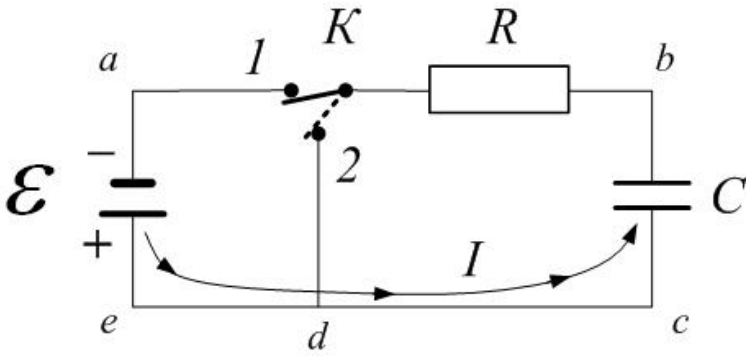


Рис.13.9

Запишем II правило Кирхгофа для контура *abcdea*:

$$I \cdot R + U = \mathcal{E} . \qquad (13.31)$$

Здесь $U = \frac{q}{C}$ – падение напряжения на конденсаторе. Сила тока по определению $I = \frac{dq}{dt} \equiv q'$; ток положительный, конденсатор заряжается – его заряд возрастает. Получили дифференциальное уравнение для заряда конденсатора:

$$q' \cdot R + \frac{q}{C} = \mathcal{E} . \qquad (13.32)$$

Его решением будет функция (13.33):

$$q = C \cdot \mathcal{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right). \qquad (13.33)$$

Доказательство получим путём подстановки (13.33) в (13.32), предварительно рассчитав производную:

$$I = \frac{dq}{dt} \equiv q' = C \cdot \mathcal{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)' = C \cdot \mathcal{E}\left(0 - e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right)\right) = \frac{C \cdot \mathcal{E}}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{\mathcal{E}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot R + \frac{C \cdot \mathcal{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}{C} = \mathcal{E} ;$$

$$\mathcal{E}\cdot\left(e^{-\frac{t}{RC}}+1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)=\mathcal{E};$$

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}.$$

Введём обозначение: $q_0 = C\cdot\mathcal{E}$.

$$q = q_0\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right). \qquad (13.33а)$$

q_0 – максимальный заряд, до которого заряжается конденсатор; при этом напряжение на нём равно ЭДС источника:

$$U=\frac{q}{C}=\mathcal{E}\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right); \qquad (13.34)$$

$$U_{\max}=\mathcal{E}.$$

Графики зависимости заряда и напряжения конденсатора от времени при его зарядке даны на рис.13.10.

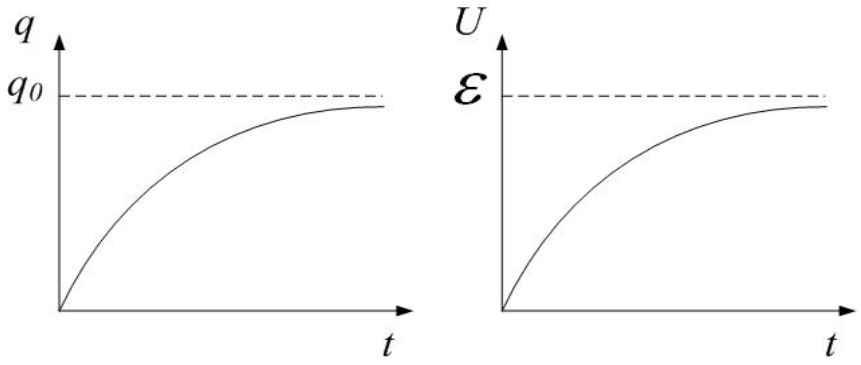


Рис.13.10

5.2. Разряд конденсатора

Переводим ключ в положение 2 (рис.13.11); источник при этом отключается, конденсатор разряжается через сопротивление.

Запишем второе правило Кирхгофа для контура 2*bcd*2 с учётом, что $\mathcal{E}=0$:

$$I\cdot R+\frac{q}{C}=0,$$

$$q'\cdot R+\frac{q}{C}=0. \qquad (13.35)$$

Решение этого дифференциального уравнения – функция (13.36); это тоже доказывается подстановкой:

$$q=q_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (13.36)$$

$$I = \frac{dq}{dt} \equiv q' = q_0 \cdot \left(e^{-\frac{t}{RC}} \right)' = q_0 \cdot \left(e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{1}{RC} \right) \right) = -\frac{q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}};$$

$$-\frac{q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot R + \frac{q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}{C} = 0.$$

$$\frac{q_0}{C} \cdot \left(-e^{-\frac{t}{RC}} + e^{-\frac{t}{RC}} \right) = 0.$$

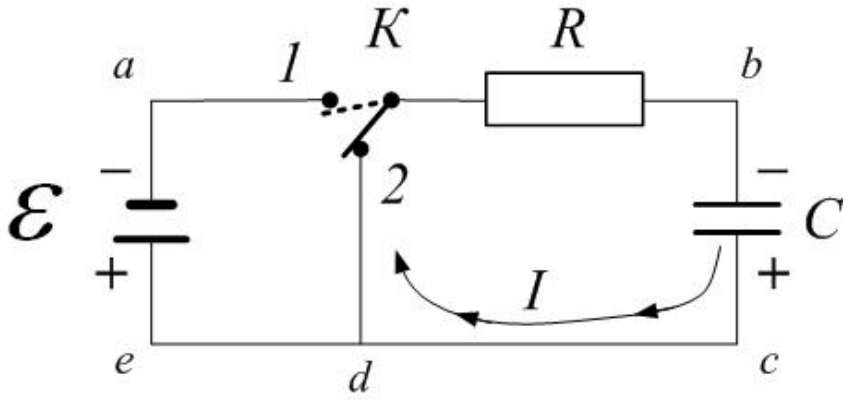


Рис.13.11

Напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Графики зависимости от времени (рис.13.12):

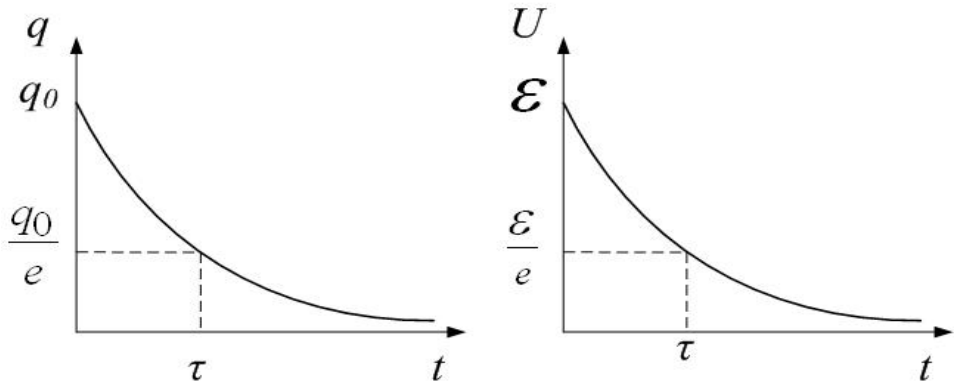


Рис.13.12

Обозначим $\tau = RC$. Это – ***постоянная времени RC-цепочки***, или ***время релаксации***. Пусть $t = \tau = RC$. Из (13.36) получим, что за время t заряд конденсатора уменьшится и станет равным

$$q = q_0 \cdot e^{-\frac{\tau}{RC}} = q_0 \cdot e^{-\frac{RC}{RC}} = q_0 \cdot e^{-1} = \frac{q_0}{e} \approx \frac{q_0}{2.7}.$$

Итак, **за время релаксации τ заряд конденсатора уменьшается в е раз**.

6. Основы классической электронной теории проводимости металлов

Носителями заряда в металлах являются электроны. В качестве экспериментальных доказательств этого приведём следующие опыты:

1. Опыт Рикке

Разнородные цилиндрические проводники тесно соприкасаются основаниями (рис.13.13); через них пропускают ток. Полный заряд, протекший за год, составил $q \approx 10^6\,Кл$. Это – огромный заряд. Если бы в переносе заряда при пропускании

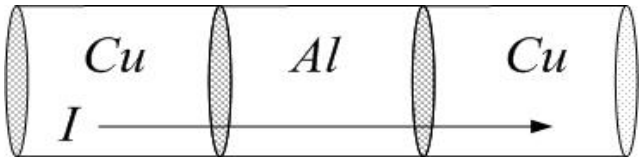


Рис.13.13

тока участвовали ионы вещества, это бы обнаружили при исследовании цилиндров после разъединения – никаких следов переноса вещества (меди или алюминия) не было. Вывод: ионы в переносе заряда не участвуют.

2. Опыт Мандельштама и Папалекси (1913 г.) и Толмена-Стюарта (усовершенствованный вариант, 1916 г.)

Идея опыта: резкое торможение проводника приводит к всплеску тока в нём, так как слабо связанные с решёткой электроны некоторое время движутся по инерции относительно решётки. Из опыта можно определить знак носителей тока (оказался отрицательный) и удельный заряд $\frac{q}{m}$ (совпал с удельным зарядом электрона $\frac{e}{m_e}$ с хорошей точностью). Опыт доказал, что носителями тока в металлах действительно являются электроны.

Теорию электронной проводимости разработали Лоренц и Друде.

Классическая электронная теория проводимости металлов исходит из того, что:

1. Носители заряда в металле – электроны.
2. Электроны слабо связаны с кристаллической решёткой.
3. Электроны движутся как в идеальном газе, то есть можно рассматривать совокупность электронов в металле как идеальный электронный газ.
4. Электронный газ находится в термодинамическом равновесии с кристаллической решёткой.

Применим законы идеального газа к электронному газу в металлах и рассчитаем среднюю арифметическую скорость теплового движения электронов при комнатной температуре $T \approx 300\,\text{K}$:

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \cdot m_e}} \approx \sqrt{\frac{8 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{\pi \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}}} \approx 10^5 \frac{м}{с}.$$

При наложении внешнего электрического поля появляется направленное движение электронов – электрический ток. Оценим среднюю скорость направленного движения $\langle \mathrm{v} \rangle$ из (13.4)

$$j = q_0 \cdot n \cdot \langle \mathrm{v} \rangle.$$

Максимальная допустимая плотность тока в металле, когда он ещё не будет плавиться, примерно равна:

$$j \approx 10^7 \frac{A}{м^2};$$

а концентрация электронов в металле

$$n \approx 10^{29} \frac{1}{м^3},$$

тогда $\langle \mathrm{v} \rangle = \frac{j}{n \cdot e} \approx \frac{10^7}{10^{29} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-3} \frac{м}{с}$; то есть порядка миллиметров в секунду.

Это много меньше тепловой скорости:

$$\langle \mathrm{v} \rangle << \langle u \rangle.$$

Поэтому величина полной скорости, равная векторной сумме $\vec{\mathrm{v}}_{\text{полная}} = \vec{\mathrm{v}} + \vec{u}$, практически не отличается от тепловой:

$$\langle \mathrm{v}_{\text{полная}} \rangle = \langle |\vec{\mathrm{v}} + \vec{u}| \rangle \approx \langle u \rangle.$$

Законы Ома и Джоуля-Ленца можно доказать, исходя из классической электронной теории.

Закон Ома. На электроны со стороны электрического поля $\vec{E}$ действует сила:

$$F = e \cdot E$$

и сообщает электрону ускорение

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{e \cdot E}{m_e}.$$

Электрон разгоняется равноускоренно в течение времени t под действием силы от нулевой начальной скорости $\mathrm{v}_0 = 0$ до максимальной $\mathrm{v}_{\max} = \mathrm{v}_0 + a \cdot t = a \cdot t$, пока не столкнётся с ионом и не остановится. Средняя скорость за время свободного пробега электрона равна

$$\langle \mathrm{v} \rangle = \frac{\mathrm{v}_0 + \mathrm{v}_{\max}}{2} = \frac{a \cdot t}{2} = \frac{e \cdot E \cdot t}{2 \cdot m_e}.$$

Время свободного пробега можно выразить через среднюю длину свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ и полную среднюю скорость, равную средней тепловой скорости $\langle \mathrm{v}_{\text{полная}} \rangle = \langle u \rangle$:

$$t = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle u \rangle}.$$

Плотность тока равна:

$$j = e \cdot n \cdot \langle \mathrm{v} \rangle = e \cdot n \cdot \frac{e \cdot E \cdot t}{2 \cdot m_e} = \frac{n \cdot e^2 \cdot E}{2 \cdot m_e} \cdot \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle u \rangle} = \frac{n \cdot e^2}{2 \cdot m_e} \cdot \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle u \rangle} \cdot E = \gamma \cdot E,$$

где γ – удельная электропроводимость. Она равна:

$$\gamma = \frac{n \cdot e^2}{2 \cdot m_e} \cdot \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle u \rangle}. \qquad (13.37)$$

Закон Ома в дифференциальной форме получен: $j = \gamma \cdot E$.

Закон Джоуля-Ленца.

Кинетическая энергия электрона в конце разбега, равная

$$W_{кин.} = \frac{m_e \cdot \mathrm{v}_{\max}^2}{2},$$

передаётся иону. Удельная тепловая мощность тока, равная, по определению, теплоте, выделяющейся за единицу времени в единичном объёме проводника:

$$w = \frac{dQ}{dt \cdot \Delta V},$$

складывается из суммарной энергии, переданной ионам электронами, содержащимися в 1 м^3 за 1 с:

$$w = W_{кин.} \cdot n \cdot \langle z \rangle;$$

здесь $\langle z \rangle = \frac{1}{t} = \frac{\langle u \rangle}{\langle \lambda \rangle}$ – среднее число столкновений электрона с ионами за 1 с.

Тогда

$$w = \frac{m_e \cdot \mathrm{v}_{\max}^2}{2} \cdot n \cdot \frac{1}{t},$$

$$w = \frac{m_e \cdot \left(\frac{e \cdot E \cdot t}{m_e} \right)^2}{2} \cdot n \cdot \frac{1}{t},$$

$$w = \frac{n \cdot e^2}{2 \cdot m_e} \cdot t \cdot E^2,$$

$$w = \frac{n \cdot e^2}{2 \cdot m_e} \cdot \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle u \rangle} \cdot E^2.$$

Получили закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме: $w = \gamma \cdot E^2$.

Недостатки классической электронной теории. Классическая теория достаточно просто и наглядно позволила вывести законы Ома и Джоуля-Ленца, но другие её выводы с опытом не совпали:

1. ***Зависимость сопротивления металла от температуры***.

Опыт показывает линейную зависимость удельного сопротивления от абсолютной температуры $\rho \sim T$ (13.16):

$$\rho = \rho_0(1+\alpha\cdot t), \qquad \rho = \rho_0\alpha\cdot T,$$

а исходя из (13.37):

$$\rho = \frac{1}{\gamma},$$

$$\rho = \frac{2\cdot m_e}{n\cdot e^2}\cdot\frac{\langle u\rangle}{\langle\lambda\rangle},$$

$$\rho \sim \langle u\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\cdot m_e}} \sim \sqrt{T}\,.$$

2. Теплоёмкость.

Опыт даёт молярную теплоёмкость металлов

$$C_V = 3R,$$

где R – универсальная газовая постоянная. По классической теории проводимости металлов теплоёмкость складывается из теплоёмкости кристаллической решётки (она равна $C_{реш.} = 3R$ по закону Дюлонга и Пти) и теплоёмкости идеального электронного газа: $C_{эл.газ} = \frac{i}{2}R$, где число степеней свободы $i = 3$ (газ одноатомный). Тогда

$$C_{Vтео} = C_{реш.} + C_{эл.газ} = 3R + \frac{3}{2}R = 4.5\cdot R\,.$$

Причина такого несовпадения теоретических выводов и опытных данных в том, что электронный газ в металлах нельзя считать классическим. Это – квантовый газ и подчиняется другим закономерностям. Подробнее об этом – в следующем семестре.

7. Термоэлектронная эмиссия (ток в вакууме)

Чтобы создать ток в вакууме, необходимо наличие движущихся заряженных частиц. В вакуумных электронных лампах электрический ток – это пучок электронов, движущихся между электродами лампы.

Для того чтобы электрон вышел из металла электрода, он должен затратить энергию; она называется работой выхода. **Работа выхода $A_{вых.}$ электрона из металла – это минимальная энергия, которую должен затратить электрон, чтобы выйти из металла в вакуум.**

Существование работы выхода обусловлено следующими механизмами:

1. Явление электростатической индукции. Оно заключается в том, что электрическое поле электрона, находящегося вблизи поверхности металла в вакууме, заставляет электроны металла уходить от поверхности (одноимённые заряды отталкиваются), в результате на поверхности возникает нескомпенсированный индуцированный положительный заряд, и к нему электрон притягивается. На электрон действует сила, затягивающая электрон обратно в металл (рис.13.14). Линии напряжённости поля, созданного электроном и индуцированным зарядом, перпендикулярны поверхности металла. Можно показать, что вне металла поле такое же, как будто создано электроном и его положительным отражением в плоскости-поверхности металла. Так можно рассчитать и напряжённость поля в любой точке, и поверхностную плотность индуцированных зарядов. Этот метод называется ***методом зеркальных изображений*** и может применяться не только для плоских поверхностей.

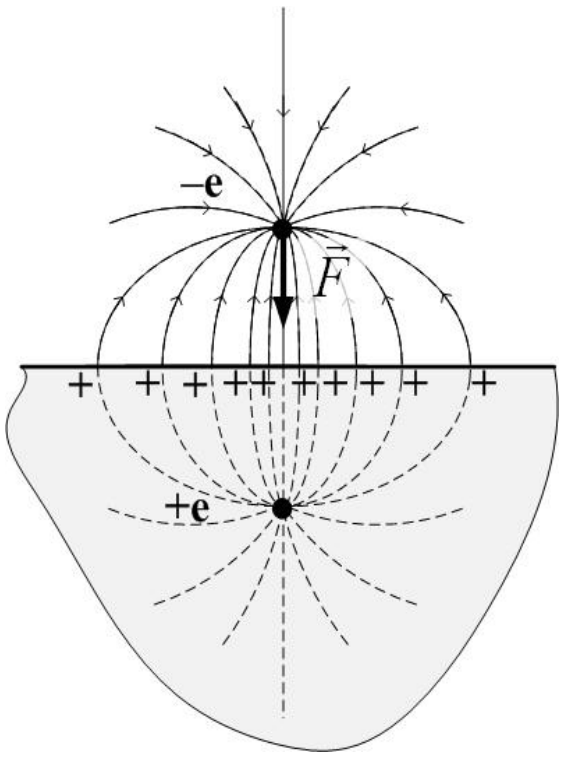


Рис.13.14

2. При температурах, отличных от абсолютного нуля, в силу распределения электронов по энергиям (аналогичного распределению Максвелла для молекул идеального газа), часть электронов имеет энергию, достаточную, чтобы покинуть металл и выйти в вакуум. Металл оказывается окружён облаком электронов. Заряженное отрицательно, это облако препятствует выходу других электронов. А сам металл при выходе электронов заряжается положительно, и это тоже препятствует выходу из него электронов.

Таким образом, ***при выходе из металла электроны должны преодолеть потенциальный барьер на границе металл-вакуум***. Его высота равна работе выхода электрона из металла:

$$A_{вых.} = e \cdot \Delta\varphi$$

и определяется химическими свойствами металла. Потенциал вакуума будем считать равным нулю $\varphi_\infty = 0$, тогда скачок потенциала на границе металл-вакуум:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_\infty = \varphi ,$$

где φ – потенциал металла:

$$\varphi = \Delta\varphi = \frac{A_{вых.}}{e} > 0 .$$

Энергия электрона внутри металла получается отрицательной:

$$W_{e^-\text{ в металле}} = (-e)\cdot\varphi < 0 .$$

Таким образом, ***металл представляет собой потенциальную яму для электронов.***

Как уже сказано, даже при комнатной температуре часть электронов имеют энергию, достаточную, чтобы покинуть металл. С повышением температуры доля таких электронов растёт экспоненциально. Это следует из распределения Больцмана по энергиям:

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{\Delta W}{kT}},$$

где n – концентрация электронов в вакууме, n_0 – в металле, $\Delta W = A_{\text{вых.}}$ – изменение энергии электрона при переходе из металла в вакуум; тогда

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{A_{вых.}}{kT}}. \qquad (13.38)$$

Термоэлектронная эмиссия – это испускание электронов нагретым металлом.

Явление термоэлектронной эмиссии используется в вакуумных лампах. Простейшая из них – диод. Она содержит 2 электрода. Есть лампы с б*о*льшим числом электродов: триод, пентод. До появления полупроводниковых приборов они широко использовались как основная деталь усилителей; а там, где нужны большие мощности, используются и сейчас.

На рис.13.15 приведена схема включения диода, а на рис.13.16 дано семейство анодных вольтамперных характеристик.

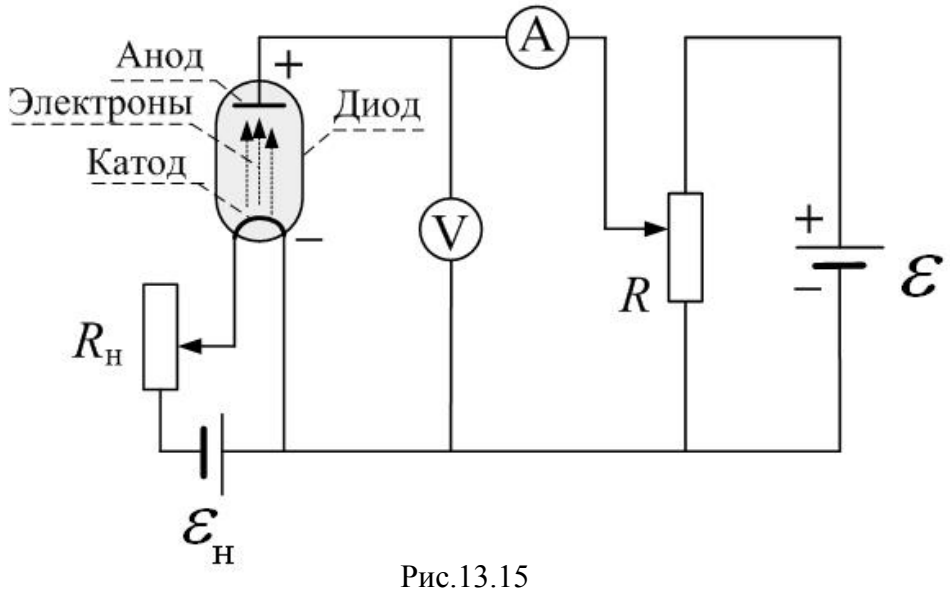


Рис.13.15

Диод представляет собой откачанный стеклянный баллон с двумя электродами – катодом (на него подаётся отрицательный потенциал) и анодом (положительный). Катод при пропускании тока от источника накала $\mathcal{E}_н$ нагревается. Ток накала и, соответственно, температуру T катода можно менять реостатом $R_н$, а напряжение U_a между катодом и анодом можно менять реостатом R. В результате нагревания катод испускает электроны за счёт термоэлектронной эмиссии. Электроны образуют облако вокруг катода; оно создаёт

пространственный заряд, препятствующий дальнейшему выходу электронов из катода. При нулевом анодном напряжении часть электронов (очень небольшая!) всё-таки достигает анода; анодный ток очень мал, но есть. С увеличением U_a всё б*о*льшая часть электронов оттягивается к аноду, и ток растёт. При небольших значениях напряжения, пока электронное облако ещё достаточно плотное, анодный ток пропорционален напряжению в степени 3/2, поэтому закон Богуславского-Ленгмюра (13.39) называют ещё «законом трёх вторых».

$$I_a = CU_a^{3/2}. \qquad (13.39)$$

Коэффициент C зависит от формы, размеров и взаимного расположения электродов.

При дальнейшем возрастании U_a электронное облако постепенно рассеивается, и ток достигает насыщения: все электроны, испущенные катодом в результате термоэлектронной эмиссии, достигают анода. Ток насыщения увеличивается с повышением температуры катода. Плотность тока насыщения описывается законом Ричардсона-Дешмана (13.40).

$$j_{нас.} = BT^2 \exp(-\frac{A_{вых.}}{kT}). \qquad (13.40)$$

Экспоненциальный множитель в этом законе можно считать следствием распределения Больцмана (13.38).

Коэффициент B называется эмиссионной постоянной; её теоретическое значение одинаково для всех металлов.

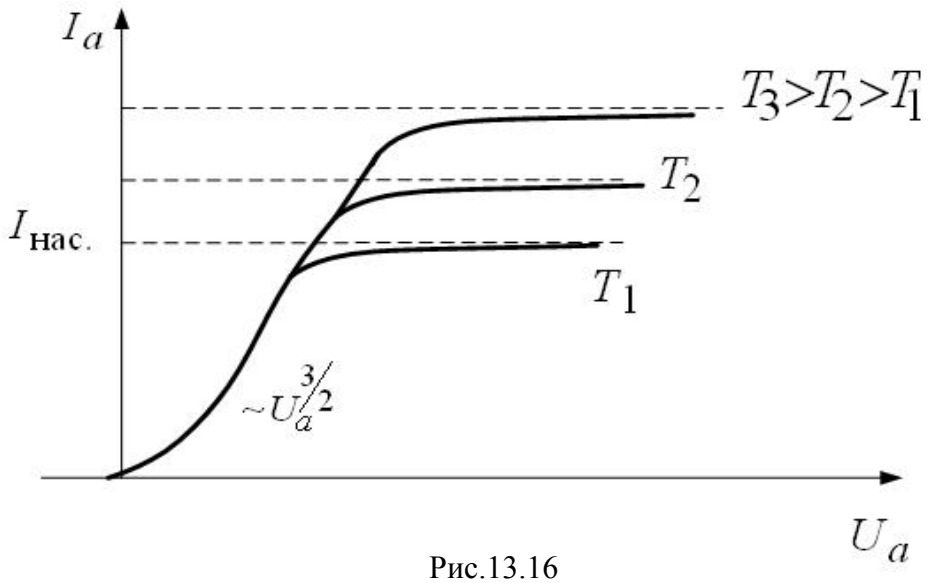


Рис.13.16

Лекция 5 (14)

Магнитное поле

План

1. Магнитное поле и его характеристики: магнитная индукция и напряжённость поля
2. Закон Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции
3. Применение закона Био-Савара-Лапласа для расчёта индукции магнитного поля
   - 3.1. Индукция поля прямого бесконечного проводника с током
   - 3.2. Индукция в центре кругового тока
   - 3.3. Индукция на оси кругового тока
   - 3.4. Поле соленоида
   - 3.5. Поле движущегося заряда
4. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме. Непотенциальность магнитного поля. Применение закона полного тока для расчёта поля прямого тока и длинного соленоида
5. Действие магнитного поля на движущиеся заряды и токи
   - 5.1. Сила Лоренца.
     - 5.1.1. Движение заряженной частицы в магнитном поле под действием силы Лоренца
     - 5.1.2. Магнетизм – релятивистский эффект
   - 5.2. Сила Ампера.
6. Рамка с током в магнитном поле
   - 6.1. Рамка с током в однородном магнитном поле. Работа по повороту рамки. Энергия рамки
   - 6.2. Рамка с током в неоднородном магнитном поле
7. Поток вектора магнитной индукции
8. Теорема Остроградского-Гаусса для магнитного поля
9. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

1. Магнитное поле и его характеристики

Магнитное поле создаётся любыми токами или движущимися зарядами. Взаимодействие токов (движущихся зарядов) осуществляется посредством магнитного поля. Магнитное поле проявляется в том, что на токи, помещённые в магнитное поле, действует сила. Магнитное поле также действует на магнитную стрелку (компаса), поворачивая её.

Величина магнитного поля характеризуется магнитной индукцией $\vec{B}$. Это – силовая характеристика поля. Механический вращающий момент силы пропорционален величине $\vec{B}$:

$$M = p_m B \sin\alpha , \qquad (14.1)$$

где α – угол между вектором магнитной индукции и магнитным моментом $\vec{p}_m$ магнитной стрелки или витка с током (14.2). То же самое можно записать в виде векторного произведения:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \times \vec{B}\right]. \qquad (14.1a)$$

Замкнутый виток с током I имеет магнитный момент $\vec{p}_m$, направленный перпендикулярно плоскости витка по правилу буравчика (правого винта), если вращать буравчик по направлению тока (рис.14.1):

$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}\,. \qquad (14.2)$$

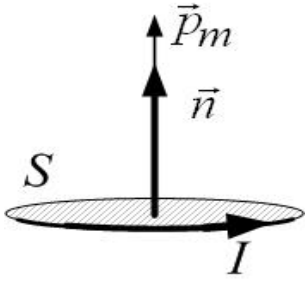


Рис.14.1

Здесь S – площадь витка, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к витку ($|\vec{n}| = 1$); его направление связано с направлением тока также правилом буравчика. Если вплотную друг к другу намотано N витков, то магнитный момент такой катушки:

$$\vec{p}_m = N \cdot I \cdot S \cdot \vec{n}\,. \qquad (14.2a)$$

Величина магнитного момента равна соответственно

$$p_m = I \cdot S \qquad (14.2)$$

или

$$p_m = N \cdot I \cdot S\,.$$

По определению, **величина магнитной индукции в данной точке поля численно равна максимальному вращающему моменту силы, действующему на виток (или магнитную стрелку) с единичным магнитным моментом**:

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}\,. \qquad (14.3)$$

В самом деле, из (14.1) следует, что вращающий момент максимален при $\sin\alpha = 1$ и $M_{\max} = p_m B$.

Размерности:

$$[p_m] = [I] \cdot [S] = A \cdot м^2;$$

$$[B] = \frac{[M]}{[p_m]} = \frac{[F \cdot l]}{[p_m]} = \frac{Н \cdot м}{A \cdot м^2} = \frac{Н}{A \cdot м} = Тл \quad \text{(тесла)}$$

Замечание: определение магнитной индукции через вращающий момент (14.3) или (14.1) – не единственно возможное; можно также ввести определение $\vec{B}$ через силу Ампера (см. дальше); – это не принципиально: оба определения эквивалентны.

Индукция магнитного поля $\vec{B}$ – векторная силовая характеристика; её можно изобразить графически. Например, на рис.14.2 изображено однородное поле. Вектор $\vec{M}$ вращающего момента силы направлен перпендикулярно обоим векторам ($\vec{p}_m$ и $\vec{B}$) из-за рисунка к нам в соответствии с правилами для векторного произведения (14.2a). Если виток с током свободен и может вращаться, то он развернётся так, что его магнитный момент сориентируется по полю; тогда $\alpha = 0$, $\sin\alpha = 0$, и момент сил тоже обратится в ноль:

$M = p_m B \sin\alpha = 0$. Это – состояние равновесия (рис.14.2, б). То же самое для магнитной стрелки (рис.14.3): она развернётся по полю северным концом (обозначение северного конца – N, южного – S) в направлении линий магнитной индукции (рис.14.3).

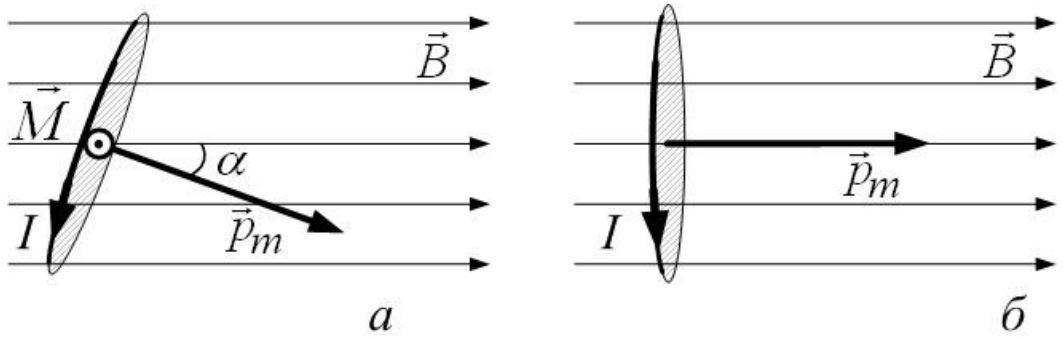


Рис.14.2

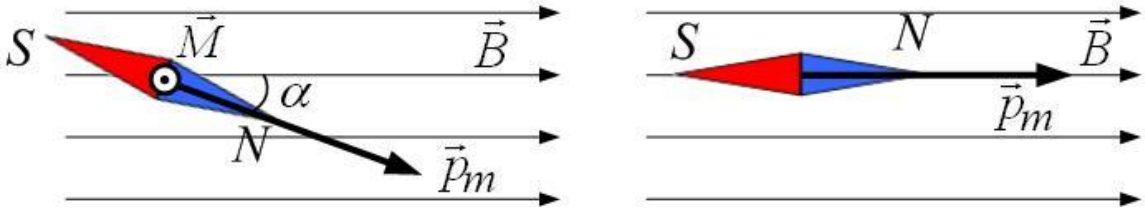


Рис.14.3

Ещё одна характеристика магнитного поля – это ***напряжённость поля*** $\vec{H}$.

В веществе индукция $\vec{B}$ магнитного поля отличается от индукции в вакууме $\vec{B}_0$. Это можно объяснить так: при помещении вещества (магнетика) во внешнее поле в веществе под действием поля возникают микротоки (термин Ампера – «молекулярные токи» не совсем правилен). Микротоки вещества сами создают дополнительную индукцию, так что индукция $\vec{B}$ поля в веществе описывает суммарное поле: внешнее поле токов проводимости и микротоков вещества.

Напряжённость поля $\vec{H}$ описывает только поле макротоков (токов проводимости). Напряжённость поля одинакова в вакууме и в веществе.

Можно провести аналогию с характеристиками электростатического поля – напряжённостью $\vec{E}$ и вектором электрического смещения $\vec{D}$:

$\vec{B}$ аналогично $\vec{E}$, так как $\vec{E}$ описывает суммарное поле свободных и связанных зарядов;

$\vec{H}$ аналогично $\vec{D}$, так как $\vec{D}$ описывает только поле свободных зарядов и одинаково в вакууме и в веществе.

Связь между характеристиками поля такая:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \qquad (14.4)$$

и аналогична соответствующей формуле для электростатического поля:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}\,.$$

Константа $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{Гн}{м}$ в (14.4) называется магнитной постоянной.

μ – магнитная проницаемость вещества. Она **показывает, во сколько раз индукция B магнитного поля в веществе больше, чем в вакууме $B_0 = \mu_0 H$:**

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{B}{B_0}. \qquad (14.5)$$

Магнитная проницаемость – безразмерная величина:

$$[\mu] = 1\,.$$

2. Закон Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции

Одна из задач электродинамики – вычисление полей, созданных зарядами и токами. В частности, нужно научиться определять в произвольной точке пространства индукцию $\vec{B}$ магнитного поля, созданного каким-либо электрическим током.

Для магнитного поля, как и для электростатического, справедлив **<u>принцип суперпозиции</u>**: **индукция поля, созданного в данной точке несколькими токами, равна векторной сумме индукций полей, созданных в данной точке каждым током в отдельности:**

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i\,. \qquad (14.6)$$

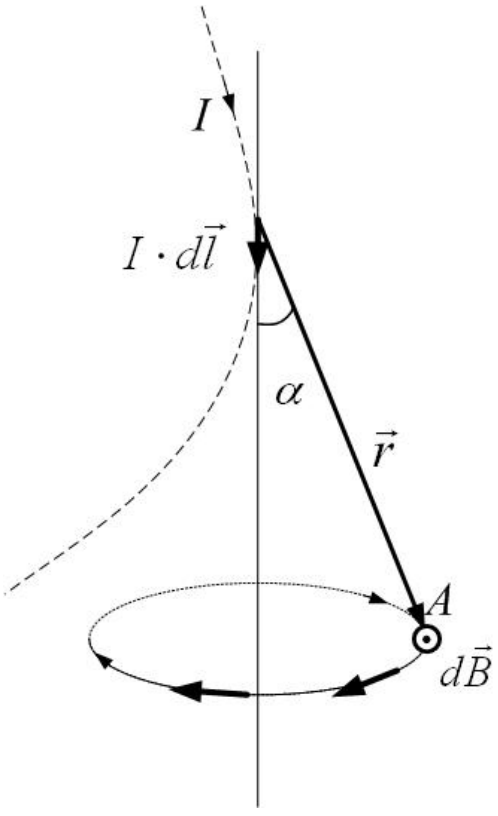


Рис.14.4

В случае непрерывного проводника принцип суперпозиции выглядит так:

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}\,. \qquad (14.7)$$

Здесь интеграл берётся по всему проводнику. Индукция, созданная непрерывным проводником с током, равна интегралу от элементарных индукций полей, созданных каждым элементом тока в отдельности. **Элемент тока $I \cdot d\vec{l}$ – это произведение силы *I* тока на элемент длины провода $d\vec{l}$.**

Рассмотрим произвольный проводник с током (рис.14.4). Рассчитать элементарную индукцию $d\vec{B}$, созданную элементом тока $I \cdot d\vec{l}$, позволяет ***закон Био-Савара-Лапласа*** (14.8):

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\left[d\vec{l} \times \vec{r}\right]}{r^3}; \qquad (14.8)$$

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2}. \qquad (14.8a)$$

Здесь $I \cdot d\vec{l}$ – элемент тока, создающий поле $d\vec{B}$ в точке A;

$\vec{r}$ – радиус-вектор точки A; он проводится от элемента тока $I \cdot d\vec{l}$ к точке;

α – угол между радиус-вектором $\vec{r}$ и элементом тока.

В соответствии с (14.8), вектор $d\vec{B}$ направлен по правилу буравчика: по касательной к окружности, проходящей через точку A с центром на продолжении элемента тока $I \cdot d\vec{l}$; плоскость окружности перпендикулярна элементу тока.

На рис.14.4 вектор $d\vec{B}$ направлен из-за чертежа к нам, перпендикулярно обоим векторам – $\vec{r}$ и $I \cdot d\vec{l}$.

3. Применение закона Био-Савара-Лапласа для расчёта индукции магнитного поля

3.1. Индукция поля прямого проводника с током

Рассматривается отрезок прямого провода 1-2 с током I (рис.14.5). Элемент тока $I \cdot d\vec{l}$ создаёт в точке A поле, индукцию которого можно записать по закону Био-Савара-Лапласа:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2}.$$

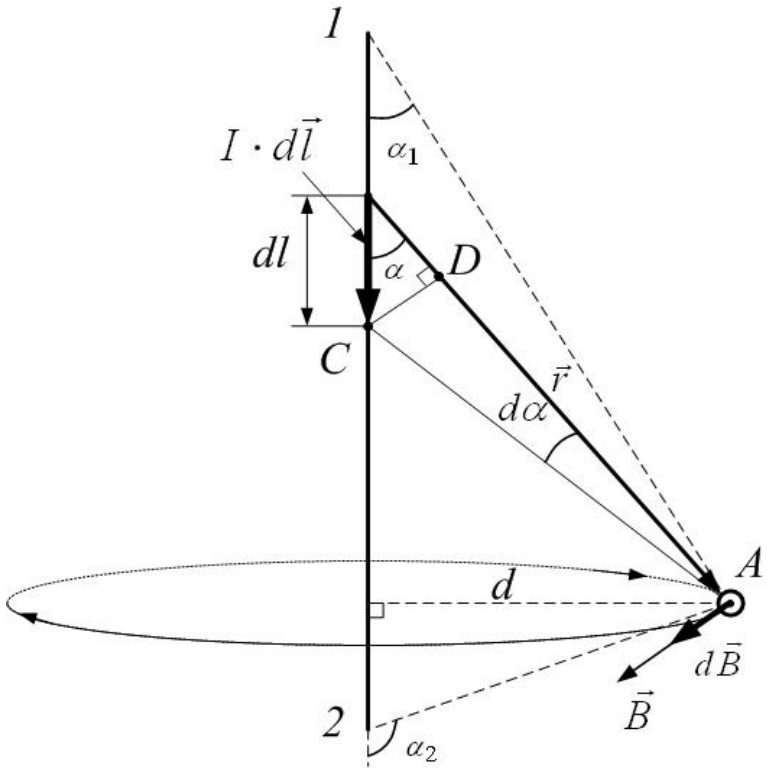


Рис.14.5

Вектор $d\vec{B}$ направлен на нас из-за рисунка. Любой другой элемент тока того же проводника создаёт в точке A индукцию, направленную так же. Тогда вместо

векторов в (14.7) можно интегрировать модуль; пределы интегрирования – точки 1 и 2, начало и конец провода:

$$B = \int_1^2 dB = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2}. \qquad (14.9)$$

Из рис.14.5 получим:

$$d = r \cdot \sin\alpha, \qquad (14.10)$$

а длина отрезка CD равна:

$$|CD| = dl \cdot \sin\alpha = r \cdot d\alpha. \qquad (14.11)$$

Последнее соотношение подставим в (14.9) и заменим $r = \frac{d}{\sin\alpha}$ из (14.10):

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot r \cdot d\alpha}{r^2} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\alpha}{r};$$

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha}{d}.$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha \cdot d\alpha$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} \cdot (-\cos\alpha)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}.$$

Окончательно получим, что индукция отрезка прямого проводника на расстоянии *d* от него равна:

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot d}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \qquad (14.12)$$

Частный случай – проводник бесконечен; тогда углы $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$, и

$$B_\infty = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot d}(\cos 0 - \cos\pi) = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot d}(1 - (-1)),$$

$$B_\infty = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot d}. \qquad (14.13)$$

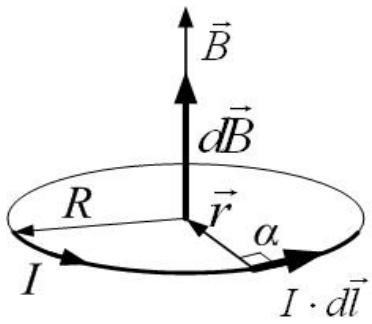


Рис.14.6

3.2. Индукция в центре кругового тока

Любой элемент тока $I \cdot d\vec{l}$ создаёт в центре витка (рис.14.6) индукцию $d\vec{B}$, направленную одинаково (вверх, по правилу буравчика); тогда векторный принцип суперпозиции (14.7) сводится к скалярному интегралу по окружности:

$$B = \oint_L dB.$$

По закону Био-Савара-Лапласа:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin 90^0}{R^2},$$

тогда

$$B = \oint_L \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin 90^0}{R^2};$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi R^2} \cdot \oint_{\substack{\text{по} \\ \text{окруж-} \\ \text{ности}}} dl = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R$$

Окончательно, индукция в центре кругового тока индукция равна:

$$B_{\text{кр.}} = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{2R}. \qquad (14.14)$$

3.3. Индукция на оси кругового тока

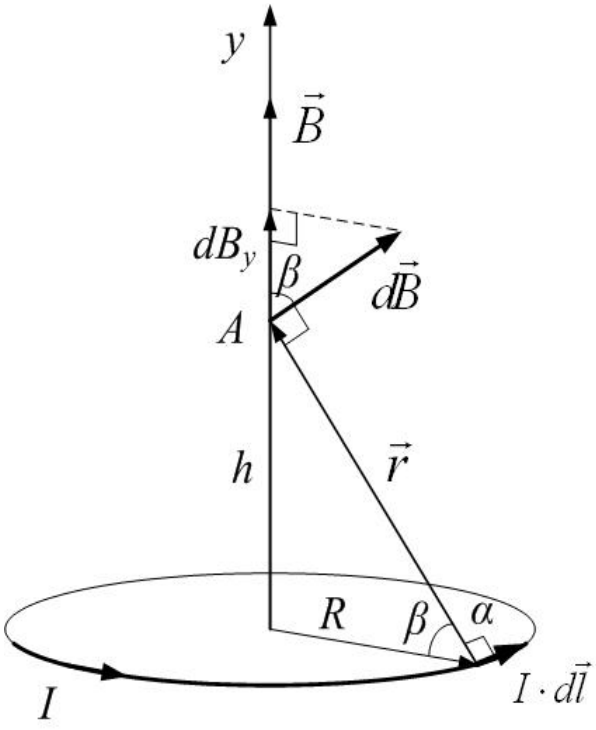


Рис.14.7

Найдём индукцию на оси кругового тока в точке А на высоте *h* над плоскостью витка (рис.14.7). Элемент тока $I \cdot d\vec{l}$ создаёт индукцию $d\vec{B}$, направленную перпендикулярно радиус-вектору $\vec{r}$ точки А и элементу тока $I \cdot d\vec{l}$. Из соображений симметрии понятно, что результирующая индукция направлена по оси симметрии тока – оси OY, и она равна собственной проекции на ось OY:

$$B = B_y = \oint_L dB_y = \oint_L dB \cdot \cos\beta;$$

причём $\cos\beta = \frac{R}{r}$. Дальше по закону Био-Савара-Лапласа:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2},$$

где $\alpha = 90^0$, $r = \sqrt{R^2 + h^2}$.

Тогда

$$B = \oint_L \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^2} \cdot \cos\beta = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2} \cos\beta \cdot \oint_{\substack{\text{по} \\ \text{окруж–} \\ \text{ности}}} dl = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2} \cdot \frac{R}{r} \cdot 2\pi R = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot r^3}.$$

Окончательно:

$$B_{\substack{\text{на} \\ \text{оси}}} = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot \sqrt{\left(R^2 + h^2\right)^3}}. \qquad (14.15)$$

3.4. Поле соленоида

Соленоид – это катушка провода, намотанного на цилиндрический каркас (рис.14.8). Будем считать, что диаметр провода мал по сравнению с диаметром самого соленоида. По обмотке соленоида течёт ток I. Индукцию магнитного поля в произвольной точке A (рис.14.9) на оси соленоида можно рассчитать по формуле (14.16):

Рис.14.8

$$B_{\text{сол.}} = \frac{\mu\mu_0 In}{2}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right), \qquad (14.16)$$

где $n = \dfrac{N}{l}$ – плотность намотки соленоида (число витков на единицу длины; N – полное число витков соленоида длиной l); углы α_1 и α_2 – см. рис.14.9.

Доказательство (14.15) дано в лаб. работе 2-12.

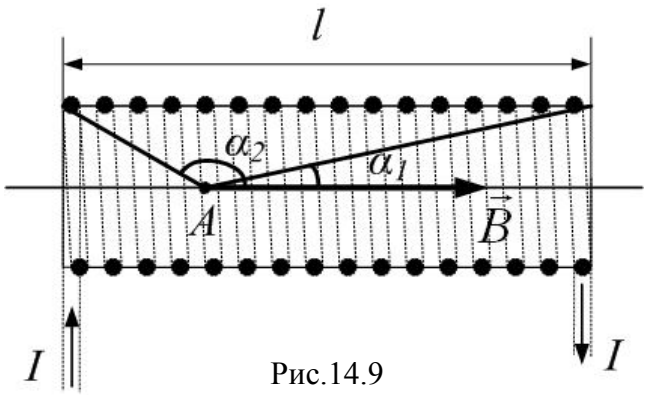


Рис.14.9

Если соленоид достаточно длинный (бесконечный), то углы

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \pi;$$

$$\cos\alpha_1 = 1, \quad \cos\alpha_2 = -1;$$

$$B_{\substack{\infty \\ \text{солен.}}} = \frac{\mu\mu_0 In}{2}\left(1 - (-1)\right).$$

Окончательно получим:

$$B_{\substack{\infty \\ \text{солен.}}} = \mu\mu_0 In. \qquad (14.17)$$

Вектор индукции направлен по оси соленоида по правилу буравчика.

3.5. Поле движущегося заряда

Движущаяся заряженная частица (рис.14.10) тоже создаёт магнитное поле. Индукцию его можно получить из закона Био-Савара-Лапласа, если сделать замену:

$$I \cdot d\vec{l} \quad \rightarrow \quad q \cdot \vec{\mathrm{v}}$$

$$d\vec{B} \quad \rightarrow \quad \vec{B}$$

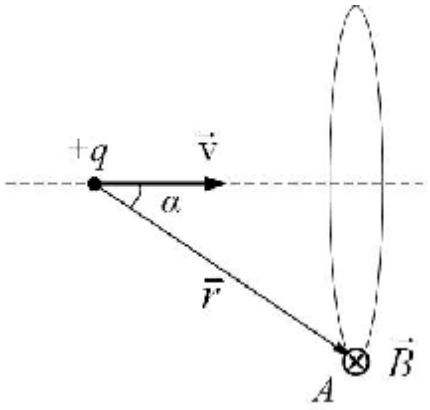


Рис.14.10

Такую замену можно обосновать тем, что сам движущийся заряд создаёт некоторый эквивалентный электрический ток, и по размерности величины $I \cdot d\vec{l}$ и $q \cdot \vec{\mathrm{v}}$ совпадают:

$$\left[I \cdot dl\right] = A \cdot м$$

$$\left[q \cdot \mathrm{v}\right] = Кл \cdot \frac{м}{с} = \frac{Кл}{с} \cdot м = A \cdot м$$

Итак, индукция магнитного поля, созданного движущимся со скоростью $\vec{\mathrm{v}}$ зарядом q в точке A с радиус-вектором $\vec{r}$, равна:

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{q[\vec{v}\times\vec{r}]}{r^3}; \qquad (14.18)$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{q\cdot v\cdot\sin\alpha}{r^2} \qquad (14.18a)$$

и направлена по правилу буравчика по касательной к окружности, охватывающей воображаемый проводник – траекторию заряда (если заряд положительный. Если отрицательный, то эквивалентный ток направлен противоположно скорости, и направление индукции $\vec{B}$ тоже надо сменить на противоположное.)

4. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме. Непотенциальность магнитного поля

Напоминание: циркуляция любого векторного поля (например, вектора магнитной индукции $\vec{B}$) – это интеграл по замкнутому контуру L:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L B\cos\alpha\cdot dl = \oint_L B_l\cdot dl,$$

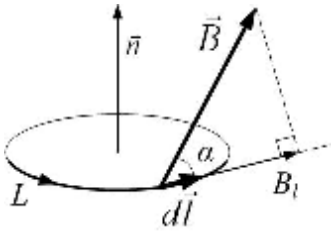


Рис.14.11

где α – угол между направлением вектора $\vec{B}$ и элементом длины контура $d\vec{l}$, B_l – проекция $\vec{B}$ на элемент длины контура (касательная составляющая), см.рис.14.11. Направление обхода контура связано с направлением нормали $\vec{n}$ к нему правилом буравчика.

<u>Теорема о циркуляции (закон полного тока).</u> Циркуляция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ магнитного поля в вакууме по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охваченных контуром, умноженной на магнитную постоянную μ_0:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\sum_i I_i. \qquad (14.19)$$

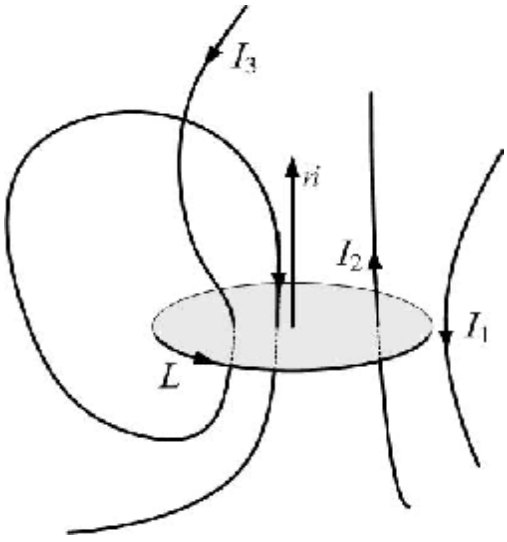


Рис.14.12

Правило знаков: если ток пронизывает контур в направлении нормали к контуру, то в сумме (14.19) ток берём со знаком «+»; иначе – «–».

Пример: рис.14.12.

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0(I_2 - 2I_3).$$

Если задана плотность тока $\vec{j}$ в любой точке поверхности, натянутой на контур L, то теорема о циркуляции выглядит так:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\cdot\int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}. \qquad (14.19a)$$

Интеграл в правой части берётся по любой поверхности, натянутой на контур L.

Применение закона полного тока для расчёта полей

Пример 1. ***Поле прямого бесконечного провода*** на расстоянии R от него (рис.14.13). Индукция $\vec{B}$ в любой точке контура L направлена по касательной к контуру и в силу симметрии одинакова, тогда циркуляция равна:

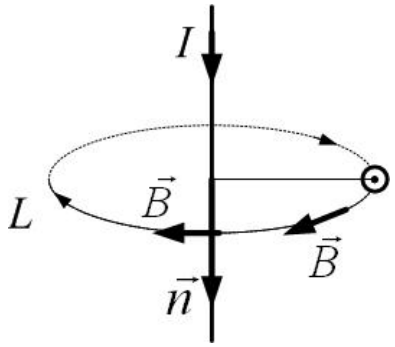


Рис.14.13

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = B \cdot \int_L d\vec{l} = B \cdot 2\pi R,$$

отсюда

$$B \cdot 2\pi R = \mu_0 \cdot I,$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R},$$

что совпадает с (14.13) для поля в вакууме.

Пример 2. ***Поле длинного (бесконечного) соленоида***.

Поле внутри соленоида однородно, а вне соленоида практически равно нулю (если соленоид достаточно длинный). Контур выбираем в виде узкого длинного прямоугольника, одна длинная сторона которого находится внутри соленоида параллельно его оси, а вторая – вне него (рис.14.14). Вклад в циркуляцию интегралов по внешней стороне и коротким сторонам прямоугольника мал, тогда

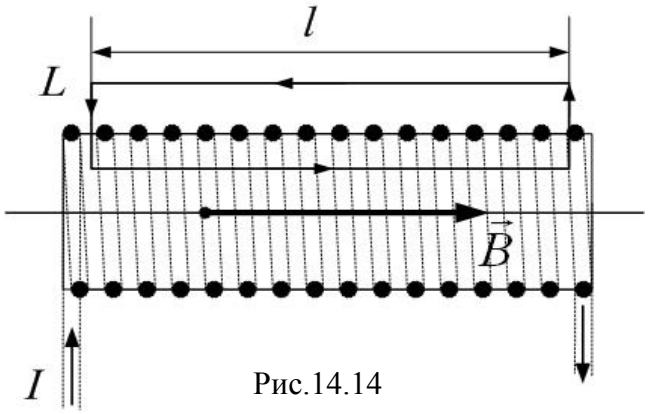


Рис.14.14

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = B \cdot \int_L d\vec{l} = B \cdot l.$$

Ток I пронизывает контур N раз, тогда

$$\sum_i I_i = I \cdot N,$$

$$B \cdot l = I \cdot N,$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{l} = \mu_0 \cdot I \cdot n,$$

где $n = \frac{N}{l}$ – плотность намотки соленоида. Полученный результат совпадает с (14.17).

Магнитное поле непотенциально, так как циркуляция вектора магнитной индукции по замкнутому контуру в общем случае не равна нулю:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} \neq 0.$$

Магнитное поле носит вихревой характер. Линии магнитной индукции замкнуты; на рис. 14.15 изображено поле прямого тока, кругового витка, соленоида и полосового магнита.

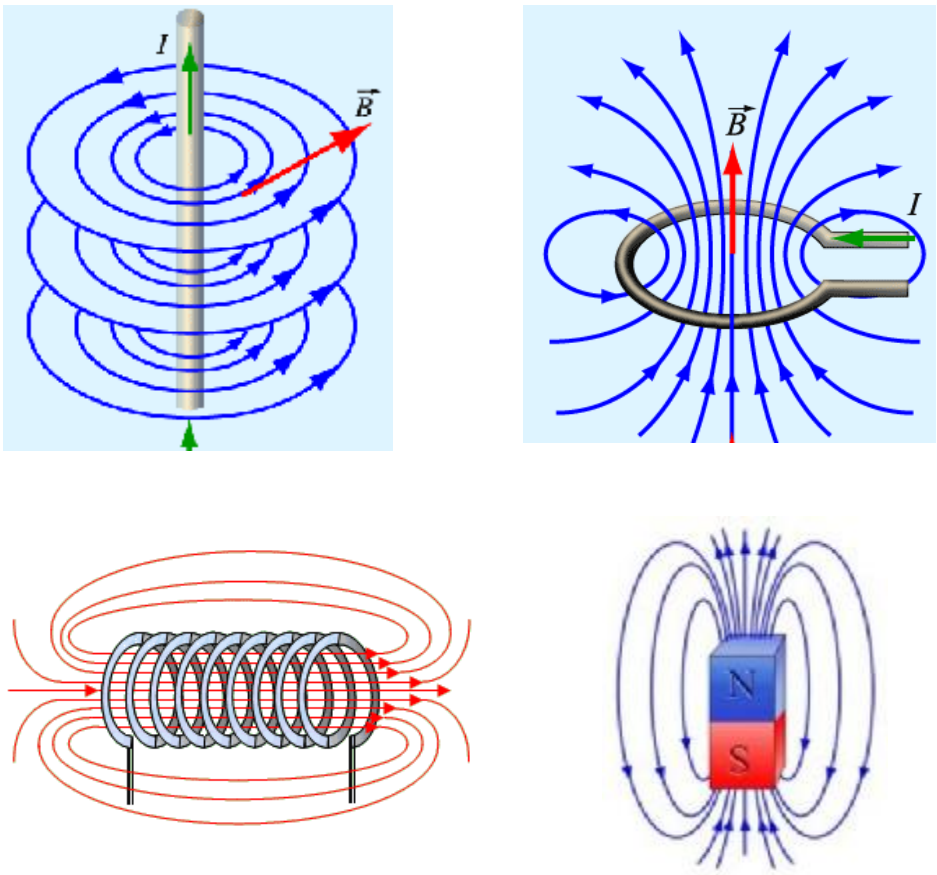


Рис.14.15

5. Действие магнитного поля на движущиеся заряды и токи

5.1. Сила Лоренца

На заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца:

$$\vec{F}_Л = q\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]. \qquad (14.20)$$

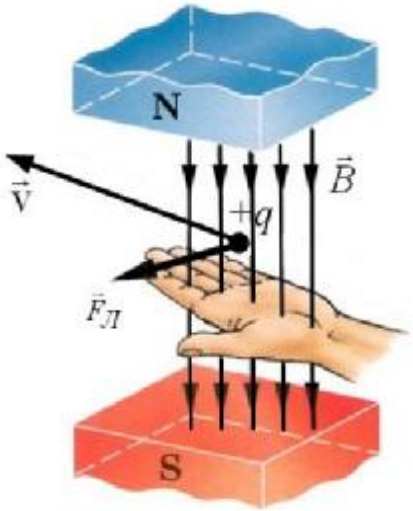


Рис.14.16

Направление силы Лоренца можно найти по правилу буравчика: вектор скорости $\vec{v}$ поворачиваем по ближайшему углу к вектору $\vec{B}$; поступательное движение буравчика даёт направление $\vec{F}_Л$. Если знаете правила векторного произведения, школьное правило левой руки помнить необязательно. По этому правилу четыре пальца левой ладони нужно направить по скорости, а линии индукции должны входить в ладонь, тогда большой палец покажет направление силы Лоренца (рис.14.16). Так работает правило левой руки в случае положительного заряда; если же заряд отрицателен, нужно направление силы сменить на противоположное. Величина силы

Лоренца равна

$$F_Л = q\mathrm{v}B\sin\alpha\,. \qquad (14.21)$$

Здесь α – угол между скоростью и полем. На рис.14.17(а) сила Лоренца направлена от нас за рисунок.

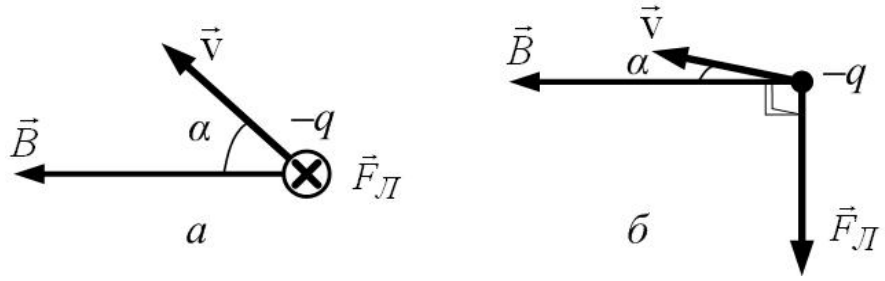


Рис.14.17

Сила Лоренца перпендикулярна как индукции поля ($\vec{F}_Л \perp \vec{B}$), так и скорости частицы ($\vec{F}_Л \perp \vec{\mathrm{v}}$); последнее означает, что она не совершает работы, так как не имеет касательной составляющей к траектории:

$$dA = \vec{F}_Л \cdot d\vec{S} = \vec{F}_Л \cdot \vec{\mathrm{v}} \cdot dt = 0\,.$$

Сила Лоренца действует только ***на движущиеся*** заряды.

5.1.1. Движение заряженной частицы в магнитном поле под действием силы Лоренца

Пусть положительно заряженная частица влетает в однородное магнитное поле под углом α к направлению линий индукции (рис.14.18).

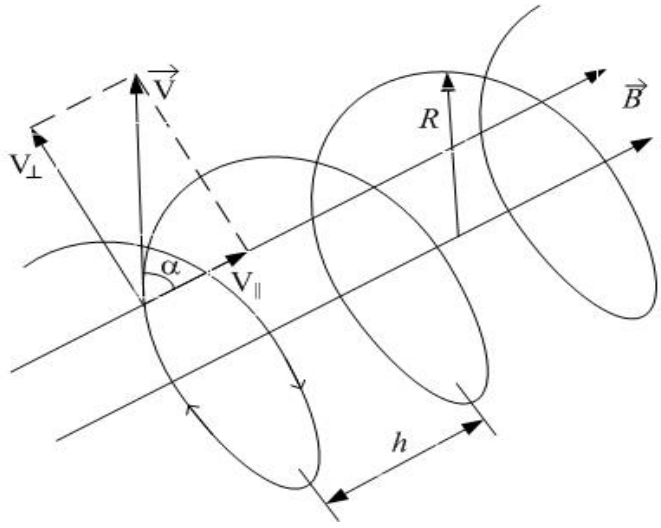


Рис.14.18

Величина силы равна $F_Л = q\mathrm{v}B\sin\alpha$. Скорость v частицы можно разложить на две составляющие: одна перпендикулярна направлению поля, другая параллельна: $\mathrm{v}_\perp = \mathrm{v}\sin\alpha$; $\mathrm{v}_\parallel = \mathrm{v}\cdot c\cos\alpha$. Тогда можно представить силу Лоренца как $F_Л = q\mathrm{v}_\perp B$. Движение частицы является суперпозицией двух движений: вращение по окружности радиуса R со скоростью $\mathrm{v}_\perp$ в плоскости, перпендикулярной полю, и равномерное поступательное движение вдоль линий поля со скоростью $\mathrm{v}_\parallel$; в результате получается движение по винтовой линии с шагом (расстоянием между соседними витками), равным $h = \mathrm{v}_\parallel \cdot T$, где $T = \dfrac{2\pi R}{\mathrm{v}_\perp}$ – период вращения. По

второму закону Ньютона $F_Л = m \cdot a_{\text{ц.с.}} = m\dfrac{\text{v}_\perp^2}{R}$, или $q \cdot \text{v}_\perp \cdot B = m\dfrac{\text{v}_\perp^2}{R}$. Отсюда $R = \dfrac{m \cdot \text{v}_\perp}{q \cdot B}$; $T = \dfrac{2\pi m}{qB}$; $h = \text{v}_\parallel \cdot \dfrac{2\pi m}{qB}$.

5.1.2. Магнетизм – релятивистский эффект

Полная сила, действующая на заряженную частицу в электромагнитном поле, равна

$$\vec{F} = q\left[\vec{\text{v}} \times \vec{B}\right] + q\vec{E}\,. \qquad (14.22)$$

Это – формула Лоренца. Первое слагаемое – привычная нам сила Лоренца – это магнитная составляющая полной силы, действующей на частицу в электромагнитном поле; второе – электрическая составляющая.

$$\vec{F}_м = q\left[\vec{\text{v}} \times \vec{B}\right];$$
$$\vec{F}_э = q\vec{E}\,.$$

Как уже было сказано, сила Лоренца $q\left[\vec{\text{v}} \times \vec{B}\right]$ действует только на движущиеся заряды. А что будет происходить, если перейти в систему отсчёта, связанную с частицей, в которой она неподвижна? Ведь тогда сила Лоренца действовать перестанет, а сила не может исчезнуть, если мы перешли к другой системе отсчёта.

Дело в том, что поля – электрическое и магнитное – неразрывно связаны. При переходе к другой системе отсчёта полная сила (14.22) останется прежней; изменится всего лишь наше её объяснение.

Конкретный пример. По проводнику течёт ток; электроны движутся направленно со средней скоростью $\vec{\text{v}}$. Параллельно проводнику с той же скоростью летит электрон. Ток создаёт магнитное поле, направленное на нас, и на электрон действует сила Лоренца, направленная к проводнику (рис. 14.19).

В системе отсчёта, связанной с электроном, магнитная составляющая силы Лоренца не действует, так как электрон покоится. Сила не исчезла; теперь это – электрическая составляющая силы Лоренца: проводник оказался заряжен положительно в этой системе отсчёта из-за релятивистского сокращения его длины, поскольку он сам в этой системе движется со скоростью v:

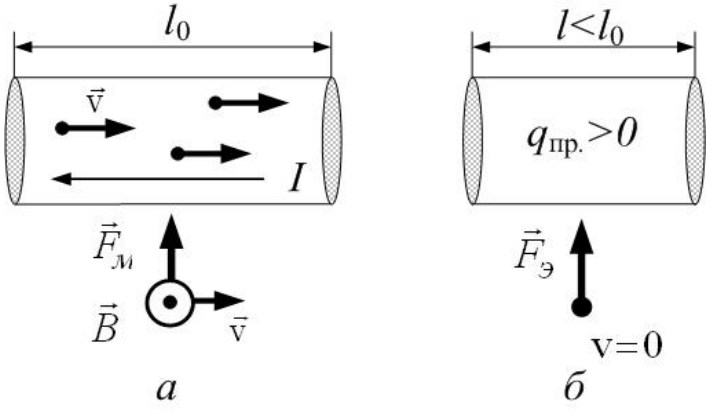


Рис.14.19

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\text{v}^2}{c^2}} < l_0\,.$$

В результате объём его уменьшился, концентрация положительных ионов увеличилась и не компенсируется отрицательным зарядом электронов.

Можно количественно доказать, что обе силы в обеих системах отсчёта одинаковы. Сила не исчезла,

изменилось лишь наше её описание: в одной системе отсчёта на электрон действовало магнитное поле тока, в другой – электрическое поле заряженного проводника. **Нет отдельно поля только электрического или только магнитного; есть единое электромагнитное поле.** В одной системе отсчёта это поле может выглядеть как только магнитное; в другой – как электрическое; в третьей присутствует и магнитное, и электрическое.

Существуют формулы преобразования векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ при переходе из одной системы отсчёта в другую (их конкретный вид в этом курсе лекций неважен); эти формулы релятивистские. Магнетизм невозможно описать без теории относительности. **Магнетизм – релятивистский эффект.**

5.2. Сила Ампера

Сила Ампера, действующая на элемент тока $I \cdot d\vec{l}$, находящийся в магнитном поле $\vec{B}$, равна:

$$d\vec{F}_A = I\left[d\vec{l} \times \vec{B}\right]; \qquad (14.23)$$

$$dF_A = I \cdot dl \cdot B \sin\alpha\,. \qquad (4.23а)$$

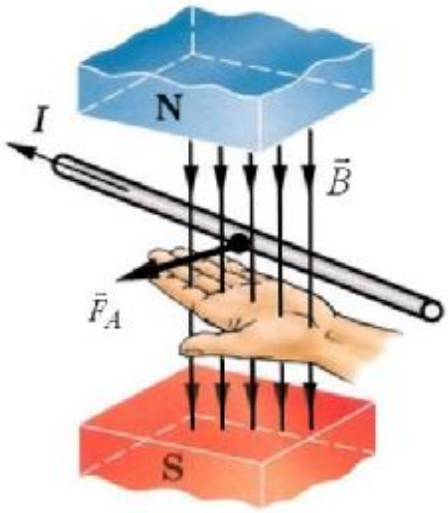


Рис.14.20

Здесь α – угол между направлением тока $I \cdot d\vec{l}$ и индукции поля $\vec{B}$. Сила Ампера перпендикулярна как проводнику с током, так и линиям индукции:

$$d\vec{F}_A \perp I \cdot d\vec{l}$$

$$d\vec{F}_A \perp \vec{B}\,.$$

Направление силы Ампера можно найти по правилу буравчика в соответствии с определением (14.23) как векторного произведения, а можно воспользоваться опять школьным правилом левой руки (рис.14.20).

Если поле однородно, а отрезок провода $\vec{l}$ – прямой, то из (14.22) получим закон Ампера в школьной формулировке:

$$\vec{F}_A = I\left[\vec{l} \times \vec{B}\right]; \qquad (14.23б)$$

$$F_A = I \cdot l \cdot B \sin\alpha\,. \qquad (14.23в)$$

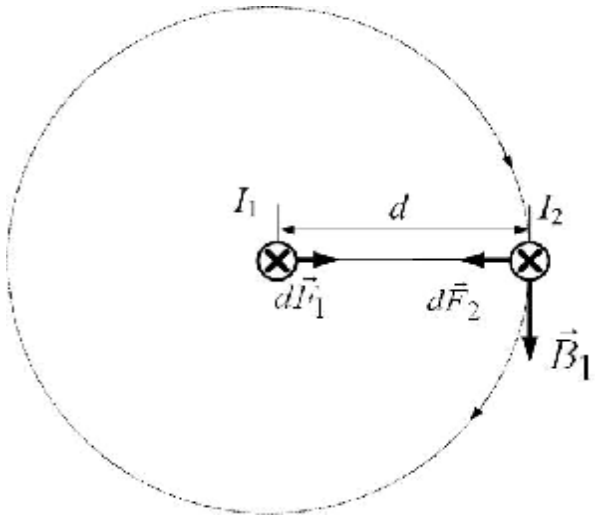


Рис.14.21

Рассмотрим ***взаимодействие параллельных токов***, находящихся на расстоянии d (рис.14.21). Проводники будем считать достаточно длинными. Пусть токи текут в одну и ту же сторону: от нас за плоскость чертежа. Ток I_1 создаёт там, где находится второй проводник, поле с индукцией B_1 (см.14.13):

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot d},$$

направленной в плоскости чертежа вниз (правило буравчика). Тогда сила Ампера, действующая на элемент второго тока $I_2 \cdot dl$, равна

$$dF_2 = I_2 \cdot dl \cdot B_1 \sin 90^0,$$

так как ток перпендикулярен полю $\vec{B}_1$; причём dF_2 направлена к первому проводнику (правило левой руки). Окончательно:

$$dF_2 = I_2 \cdot dl \cdot \frac{\mu\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot d};$$

$$dF_2 = \frac{\mu\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d} dl.$$

Сила, действующая на единицу длины второго провода, равна:

$$\frac{dF_2}{dl} = \frac{\mu\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d}.$$

Аналогично можно получить силу, действующую на единицу длины первого провода со стороны магнитного поля второго тока:

$$\frac{dF_1}{dl} = \frac{\mu\mu_0 \cdot I_2 \cdot I_1}{2\pi \cdot d}.$$

Силы равны и противоположны: это третий закон Ньютона.

$$d\vec{F}_1 = -d\vec{F}_2.$$

Токи, текущие в одинаковом направлении, притягиваются, а текущие в противоположных направлениях – отталкиваются.

6.1. Рамка с током в однородном магнитном поле

Рассмотрим прямоугольную рамку в однородном магнитном поле. Две стороны рамки длиной *a* параллельны полю, две других длиной *b* находятся к нему под углом. Нормаль к рамке составляет угол α с линиями поля (рис.14.22).

Силы Ампера, действующие на стороны длиной *b*, уравновешивают друг друга – они направлены по одной прямой. Силы, действующие на стороны длиной *a*, составляют пару сил:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

и по закону Ампера

$$\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| \equiv F = I \cdot a \cdot B \cdot \sin 90^0.$$

Плечо пары сил (расстояние между линиями их действия) равно

$$d = b \cdot \sin\alpha,$$

Момент пары сил равен

$$M = F \cdot d = I \cdot a \cdot B \cdot b \cdot \sin\alpha.$$

Произведение $a \cdot b = S$ – это площадь рамки, а $I \cdot S = p_m$ – это магнитный момент рамки. Тогда

$$M = p_m \cdot B \cdot \sin\alpha.$$

Направлен момент пары сил так же как и векторное произведение $\left[\vec{p}_m \times \vec{B}\right]$, то есть получаем формулу (14.1):

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \times \vec{B}\right].$$

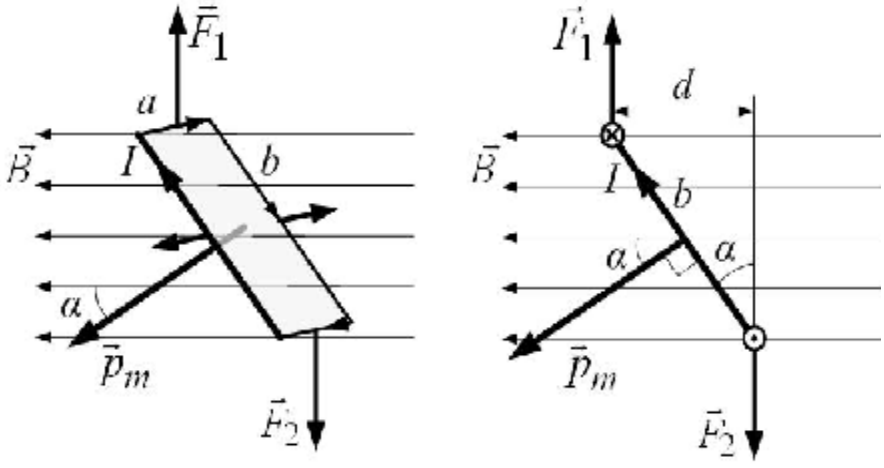


Рис.14.22

Работа по повороту рамки с током в магнитном поле. Энергия рамки в магнитном поле

Найдём работу внешних сил по повороту рамки с током, имеющей магнитный момент $\vec{p}_m$, на угол $d\alpha > 0$ против часовой стрелки (рис.14.22). Она равна

$$dA = M \cdot d\alpha$$

и идёт на увеличение энергии рамки в магнитном поле:

$$dA = dW .$$

Тогда

$$dW = M \cdot d\alpha$$

$$\frac{dW}{d\alpha} = M = p_m B \sin\alpha .$$

Отсюда

$$W = -p_m B \cos\alpha ,$$

$$W = -\vec{p}_m \vec{B}, \qquad (14.24)$$

так как $\left(\cos\alpha\right)' = -\sin\alpha$, а $\vec{B}$ и $\vec{p}_m$ не зависят от угла α.

6.2. Рамка с током в неоднородном магнитном поле

Поместим рамку с током или магнитную стрелку с магнитным моментом $\vec{p}_m$ ***в <u>не</u>однородное магнитное поле*** (рис.14.23). Тогда силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ не будут параллельны и возникает равнодействующая, направленная вдоль поля. Если угол $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$, то равнодействующая направлена в сторону сильного поля: **магнитный момент втягивается в область сильного поля.**

И наоборот (рис.14.24): **если** $\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi$**, то магнитный момент выталкивается из области сильного поля.**

Можно вычислить результирующую силу, действующую на магнитный момент в магнитном поле. Из темы «Механика»:

$$\vec{F} = -gradW_{\text{пот.}};$$

тогда

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p_m B\cos\alpha\right)$$

$$F_x = p_m \cos\alpha \frac{\partial B}{\partial x}.$$

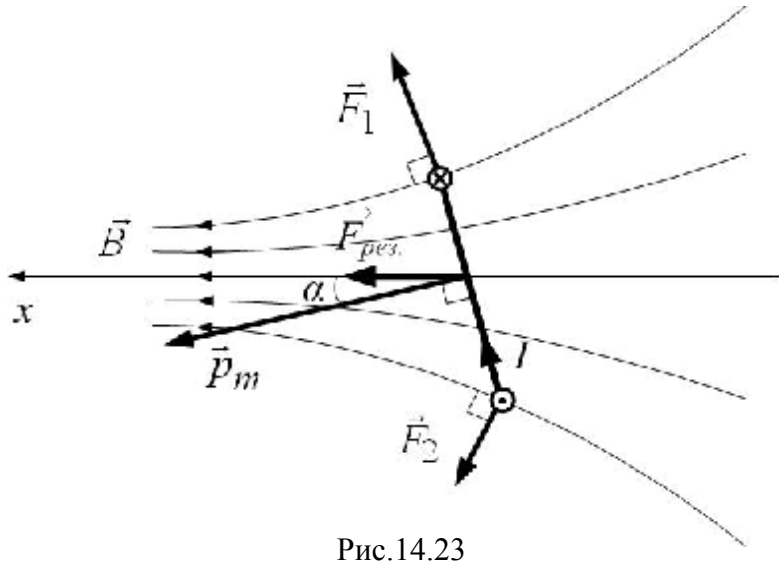


Рис.14.23

Так что если $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha > 0$. Если поле усиливается вдоль оси OX ($\frac{\partial B}{\partial x} > 0$), то проекция результирующей силы на ось OX положительна:

$$F_x = p_m \cos\alpha \frac{\partial B}{\partial x} > 0.$$

Если $\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi$, то $\cos\alpha < 0$, и

$$F_x = p_m \cos\alpha \frac{\partial B}{\partial x} < 0.$$

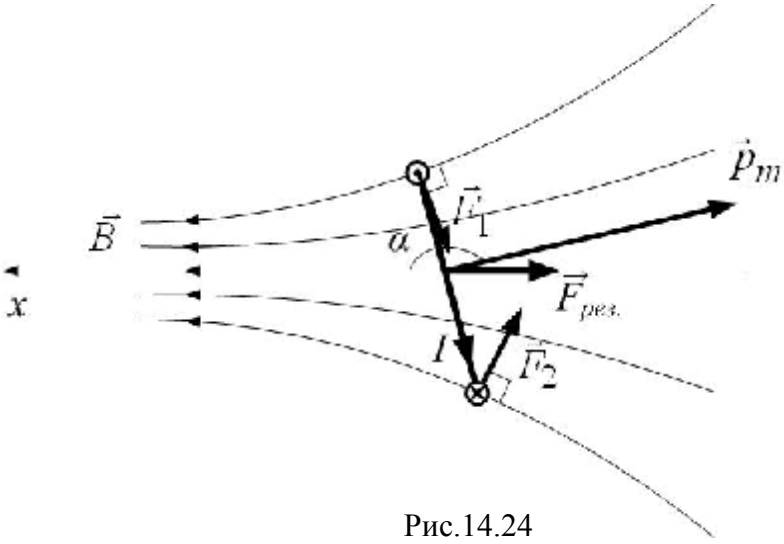


Рис.14.24

7. Поток вектора магнитной индукции

По определению потока любого векторного поля поток вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через элементарную площадку dS равен:

$$d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{S} = B\cdot dS\cdot\cos\alpha = B_n\cdot dS, \qquad (14.25)$$

где α – угол между вектором $\vec{B}$ и единичным вектором нормали к площадке $\vec{n}$ (рис.14.25).

Магнитный поток через любую поверхность – это интеграл по поверхности:

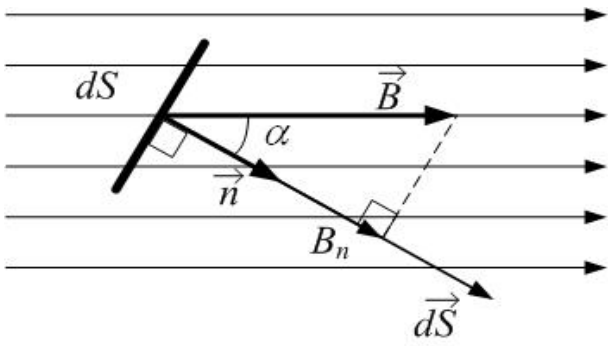


Рис.14.25

$$\Phi = \int\limits_S d\Phi = \int\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int\limits_S B_n \cdot dS\,.$$

Размерность магнитного потока – вебер:

$$\left[\Phi\right] = Тл\cdot м^2 = Вб\,.$$

Физический смысл магнитного потока: **магнитный поток численно равен числу линий магнитной индукции, пронизывающих площадку**.

Пример: найдём магнитный поток через сечение длинного соленоида. Поле однородно; нормаль к сечению совпадает по направлению с полем, тогда

$$\Phi = \int\limits_S B\cdot dS = B\int\limits_S dS = B\cdot S = \mu\mu_0 In\cdot S = \mu\mu_0 I\frac{N}{l}\cdot S\,.$$

Полное потокосцепление (суммарный поток через все N витков соленоида):

$$\Psi = N\cdot\Phi = N\cdot\mu\mu_0 I\frac{N}{l}\cdot S = \mu\mu_0 I\frac{N^2}{l}\cdot S\,. \qquad (14.26)$$

8. Теорема Остроградского-Гаусса для магнитного поля

Магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0\,. \qquad (14.27)$$

Физический смысл этой теоремы: **магнитных зарядов нет**. Для сравнения вспомним теорему Гаусса для электростатического поля: поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, охваченных поверхностью:

$$\oint\limits_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum\limits_i q_i\,.$$

Если отдельные тела можно зарядить либо только положительно, либо только отрицательно, поскольку существуют элементарные заряженные частицы – носители электрических зарядов двух разных видов, – то отделить один из магнитных полюсов от противоположного невозможно. Если разрезать на две части магнит, то каждая часть будет снова вести себя как самостоятельный магнит, имеющий на своих концах противоположные полюсы (рис. 14.26).

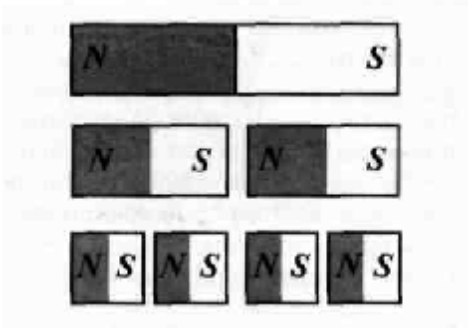


Рис. 14.26

Что произойдет, если при делении дойти до того, что разбить магнит на отдельные атомы? Можно ли тогда отделить северный полюс от южного? Нет, даже отдельные атомы ведут себя как микроскопические, но тем не менее

«полноценные» магниты с северным и южным полюсами. Оказывается, что даже отдельные элементарные частицы (например, электроны) представляют собой микромагниты. В настоящее время отсутствуют какие-либо экспериментальные доказательства того, что в природе могут существовать отдельные магнитные заряды (монополи), подобные электрическим. В отличие от электрических зарядов **свободных магнитных "зарядов" в природе не существует**. Нет их и в полюсах постоянных магнитов. Поэтому линии магнитной индукции не могут обрываться на полюсах.

9. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

Пусть проводник с током I длиной l, перпендикулярный индукции магнитного поля $\vec{B}$, перемещается в магнитном поле перпендикулярно полю под действием силы Ампера (рис.14.27). Тогда работа силы Ампера при перемещении на dh равна:

$$dA = F_A \cdot dh = I \cdot l \cdot B \cdot dh = I \cdot B \cdot dS = I \cdot d\Phi .$$

$$dA = I \cdot d\Phi . \qquad (14.28)$$

Если сила тока не меняется, то

$$\Delta A = I \cdot \Delta\Phi . \qquad (14.28а)$$

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока на изменение магнитного потока (на пересечённый проводником магнитный поток). Площадка $dS = l \cdot dh$ – это ***заметённая*** проводником в процессе движения площадь.

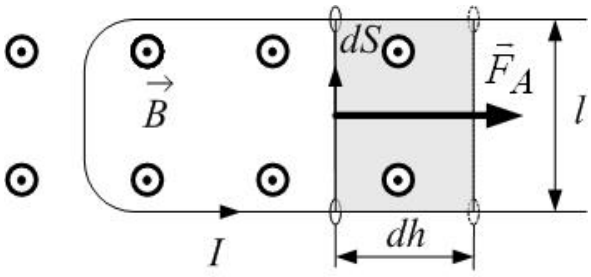


Рис.14.27

Формула (14.28) универсальна: работа по изменению магнитного потока через замкнутый контур вычисляется так же, независимо от того, за счёт чего изменяется магнитный поток: или контур деформировали, или изменяли его ориентацию в пространстве или даже если меняли индукцию поля. В последнем случае это – работа по поддержанию тока постоянным при изменении магнитного потока через контур вследствие изменения самого поля $\vec{B}$.

Лекция 6 (15)

Магнитное поле в веществе

План

1. Магнитное поле в веществе. Намагниченность. Магнитная восприимчивость. Магнитная проницаемость.
2. Виды магнетиков: диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики.
3. Магнитные моменты атомов. Опыт де Гааза. Опыт Штерна и Герлаха
4. Диамагнетизм
5. Парамагнетизм
6. Ферромагнетизм
   6.1. Свойства ферромагнетиков
   6.2. Природа ферромагнетизма
   6.3. Ферриты
7. Закон полного тока для магнитного поля в веществе
8. Условия для магнитного поля на границе раздела двух изотропных сред

1. Магнитное поле в веществе

Если магнетик поместить во внешнее магнитное поле, то он намагничивается (приобретает магнитный момент). **Намагниченность $\vec{J}$ – суммарный магнитный момент единицы объёма вещества:**

$$\vec{J} = \frac{\sum_i \vec{p}_{mi}}{\Delta V}, \qquad (15.1)$$

где $\vec{p}_{mi}$ – магнитный момент i-того атома (молекулы); суммирование идёт по всем атомам в объёме ΔV.

Намагничивание вещества, по гипотезе Ампера, происходит потому, что в веществе, помещённом во внешнее магнитное поле $\vec{B}_0$, под действием этого поля начинают течь молекулярные токи. Полная индукция поля в веществе определяется суммой индукции поля $\vec{B}_0$ макротоков (токов проводимости) и поля $\vec{B}'$ микротоков, появившихся вследствие намагничивания вещества (термин «молекулярные токи» не совсем удачен, в дальнейшем будет использоваться термин «микротоки»):

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \qquad (15.2)$$

Индукция поля в вакууме связана с напряжённостью (см. предыдущую лекцию):

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}. \qquad (15.3)$$

Поле микротоков пропорционально намагниченности:

$$\vec{B}' = \mu_0 \cdot \vec{J}. \qquad (15.4)$$

Намагниченность для большинства магнетиков пропорциональна напряжённости внешнего поля:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}\,, \qquad (15.5)$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества; она безразмерна ($[\chi]=1$); может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Тогда

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi \vec{H} = \mu_0 (1+\chi)\vec{H}\,.$$

Обозначив

$$\mu = 1 + \chi\,, \qquad (15.6)$$

получим

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}\,. \qquad (15.7)$$

Здесь μ – магнитная проницаемость вещества. Её смысл можно сформулировать так: **магнитная проницаемость показывает, во сколько раз увеличивается индукция *B* магнитного поля в веществе по сравнению с индукцией B_0 в вакууме**:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{B}{B_0}\,. \qquad (15.8)$$

В некоторых веществах индукция поля уменьшается по сравнению с вакуумом, то есть μ может быть как больше, так и меньше 1. Магнитная проницаемость, как и восприимчивость, безразмерна: $[\mu]=1$.

Формула связи индукции и напряжённости (15.7) работает не всегда, в общем случае эти векторы не параллельны; так что лучше использовать другую:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}\,. \qquad (15.9)$$

2. Виды магнетиков

Диамагнетики

Диамагнетики во внешнем поле намагничиваются противоположно полю:

$$\vec{J} \uparrow\downarrow \vec{H}\,.$$

Для них магнитная восприимчивость $\chi < 0$, магнитная проницаемость $\mu = \chi + 1 < 1$. Диамагнетики – слабомагнитные вещества, так как значение χ мало: $|\chi| \approx 10^{-4} \div 10^{-6}$, и $\mu \approx 1$.

Парамагнетики – тоже слабомагнитные, но знак магнитной восприимчивости χ для них противоположен: $\chi > 0$. Они намагничиваются параллельно внешнему полю:

$$\vec{J} \uparrow\uparrow \vec{H}\,,$$
$$\mu = \chi + 1 > 1.$$

Магнитная проницаемость для них, как и для диамагнетиков, тоже мало отличается от единицы вследствие малости χ: $\mu \approx 1$.

Ферромагнетики – сильномагнитные вещества; $\chi > 0$; $\vec{J} \uparrow\uparrow \vec{H}$. Магнитная восприимчивость очень велика:

$$\mu \approx \chi \approx 10^2 \div 10^5\,.$$

Для ферромагнетиков характерна нелинейная зависимость $\vec{J}$ от $\vec{H}$, то есть магнитная восприимчивость не постоянна: $\chi \neq const$, и, кроме того, она зависит от предыстории намагничивания ферромагнетика.

Есть ещё **<u>антиферромагнетики и ферримагнетики</u>**.

3. Магнитные моменты атомов. Опыт де Гааза. Опыт Штерна и Герлаха

В какой-то мере понять природу магнетизма поможет простая модель атома. Будем считать, что электрон в атоме вращается по круговой орбите радиуса r со скоростью v (рис.15.1). Орбита электрона подобна контуру с эквивалентным током I:

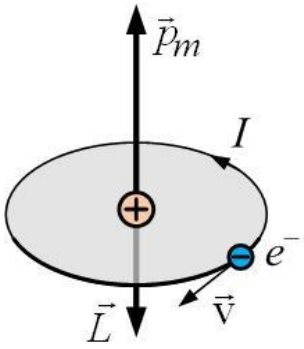


Рис.15.1

$$I = \frac{e}{T},$$

где $T = \dfrac{2\pi \cdot r}{\mathrm{v}}$ – период вращения электрона, e – заряд, прошедший в контуре за это время. Тогда

$$I = \frac{e}{\dfrac{2\pi \cdot r}{\mathrm{v}}} = \frac{e\mathrm{v}}{2\pi \cdot r}.$$

Магнитный момент этого контура

$$p_m = IS = \frac{e\mathrm{v}}{2\pi \cdot r} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{e\mathrm{v} \cdot r}{2}\ . \qquad (15.10)$$

Орбитальный момент импульса вращающегося электрона по определению равен:

$$\vec{L} = \left[\vec{r} \times m\vec{\mathrm{v}}\right];$$

$$L = r \cdot m\mathrm{v}, \qquad (15.11)$$

поскольку радиус-вектор электрона перпендикулярен скорости. Оба момента – магнитный $\vec{p}_m$ и механический $\vec{L}$ – друг другу пропорциональны; их отношение равно:

$$\frac{p_m}{L} = \frac{e\mathrm{v} \cdot r}{2r \cdot m\mathrm{v}} = \frac{e}{2m}$$

и называется ***орбитальным гиромагнитным отношением***:

$$g_l = \frac{e}{2m}. \qquad (15.12)$$

Кроме того, оба вектора, $\vec{p}_m$ и $\vec{L}$, направлены по оси орбиты по правилу буравчика: первый – соответственно направлению тока, второй – направлению вращения электрона. Поскольку заряд электрона отрицательный, то направление тока противоположно скорости, а направление $\vec{p}_m$ противоположно $\vec{L}$. Тогда можно написать векторное равенство:

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m}\vec{L} = -g_l \cdot \vec{L}. \qquad (15.13)$$

Связь между механическим и магнитным моментами приводит к тому, что при намагничивании магнетика он начинает вращаться. Примитивно это можно объяснить так: в намагниченном магнетике ориентация магнитных моментов упорядочивается, электроны всех атомов начинают дружно вращаться в одну сторону, и их суммарный механический момент импульса становится отличным от нуля. А полный момент импульса магнетика должен сохраняться (равен нулю). Следовательно, кристаллическая решётка должна начать вращаться в сторону, противоположную вращению электронов. Правда, эффект этот очень мал из-за малости массы электронов по сравнению с массой ядер, поэтому увидеть этот эффект трудно, но можно.

Идея такого опыта была предложена Эйнштейном и осуществлена им же совместно с де Гаазом. Схема опыта дана на рис.15.2. Железный стержень подвешен на кварцевой нити внутри соленоида. При пропускании тока через соленоид стержень намагничивался и вследствие этого поворачивался. Поворот фиксировался по смещению светового зайчика, отражённого от зеркальца, прикреплённого к стержню (к нити). Важная деталь: ток – переменный; его частота совпадала с резонансной частотой крутильных колебаний стержня на нити. Это позволило зафиксировать эффект, который, как уже отмечалось выше, очень мал.

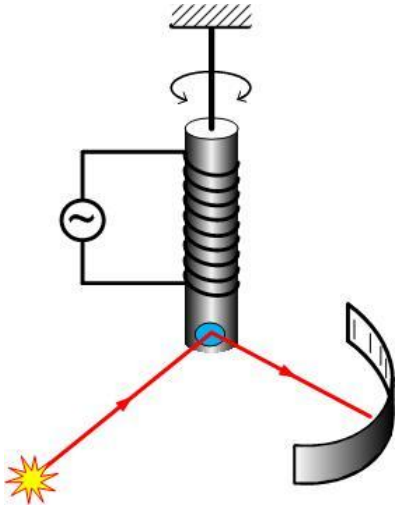


Рис.15.2

Гиромагнитное отношение, полученное в этих опытах, оказалось в 2 раза больше ожидаемого (15.12) и равно

$$g_S = \frac{e}{m}. \qquad (15.14)$$

Для объяснения этого пришлось предположить, что:

1. Магнетизм железа обусловлен не орбитальным движением электронов.
2. Электрон сам по себе обладает ***собственным (спиновым) моментом импульса*** $\vec{L}_S$ и связанным с ним магнитным моментом $\vec{p}_{mS}$; причём соотношение между ними g_S (спиновое гиромагнитное отношение) в этих опытах и было измерено.

Спин электрона:

$$s_{e^-} = \frac{1}{2}. \qquad (15.15)$$

Спин – неотъемлемое свойство электрона, как, например, его масса или заряд. Нельзя представлять электрон как макроскопический объект, вращающийся вокруг своей оси и поэтому имеющий момент импульса. Спин имеет не классическую природу, а квантовую, и не связан с движением электрона.

Спином обладают многие частицы: у протона и нейтрона спин, как у электрона, равен тоже $\frac{1}{2}$, а у фотона спин равен 1.

Модуль спинового (собственного) механического момента импульса

$$L_S = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{3}, \qquad (15.16)$$

где $\hbar$ – постоянная Планка с чертой, равная обычной постоянной Планка $h = 6.625\cdot10^{-34}\ Дж\cdot с$, делённой на 2π:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Модуль спинового магнитного момента электрона равен

$$p_{ms} = g_s \cdot L_s = \frac{e}{m}\cdot\frac{\hbar}{2}\sqrt{3} \equiv \sqrt{3}\cdot\mu_B.$$

Константа $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ называется ***магнетон Бора***.

Моменты – механический и магнитный – не имеют определённого направления в пространстве (принцип неопределённостей!), но их проекции (на направление внешнего поля $\vec{B}$, например) могут принимать только строго определённые значения (квантуются). Так, для электрона возможны две проекции механического спинового момента (например, на ось OZ – см. рис.15.3):

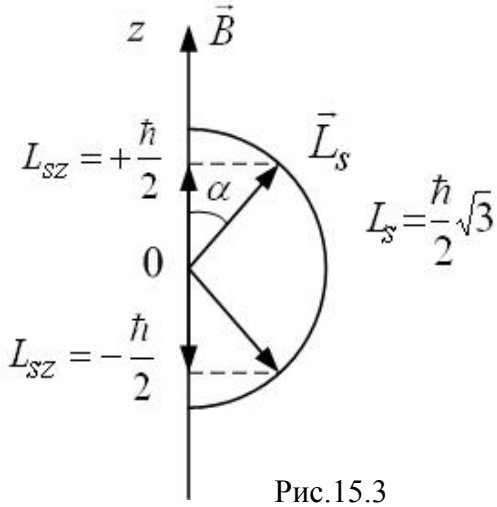


Рис.15.3

$$L_{sz} = +\frac{\hbar}{2} \qquad \text{или} \qquad L_{sz} = -\frac{\hbar}{2}.$$

Для простоты говорят в этих случаях, что спин электрона ориентирован по полю или против поля. Соответственно, проекции спинового магнитного момента равны

$$p_{msz} = g_s \cdot L_{sz} = +\mu_B \qquad \text{или} \qquad p_{msz} = -\mu_B.$$

Полный магнитный момент атома складывается из орбитальных $\vec{p}_{ml}$ и спиновых $\vec{p}_{ms}$ моментов всех электронов и ядер. Моменты ядер малы вследствие их большой массы и малости ядерного магнетона Бора:

$$\mu_{B\,Я} = \frac{e\hbar}{2m_Я} << \frac{e\hbar}{2m_e},$$

так что их можно не учитывать.

$$(\vec{p}_m)_{атома} = \sum \vec{p}_{ms} + \sum \vec{p}_{ml}.$$

Для молекул картина ещё более сложная.

Квантование моментов было получено в ***опыте Штерна и Герлаха***. Схема опыта дана на рис.15.4.

Пучок атомов, испарившихся в результате нагревания, попадал в сильно неоднородное магнитное поле. Неоднородность поля достигалась специальной конструкцией наконечников магнитов. В неоднородном поле на атомы действовала сила (см. предыдущую лекцию):

$$F_z = p_m \cos\alpha \frac{\partial B}{\partial z}, \qquad (15.17)$$

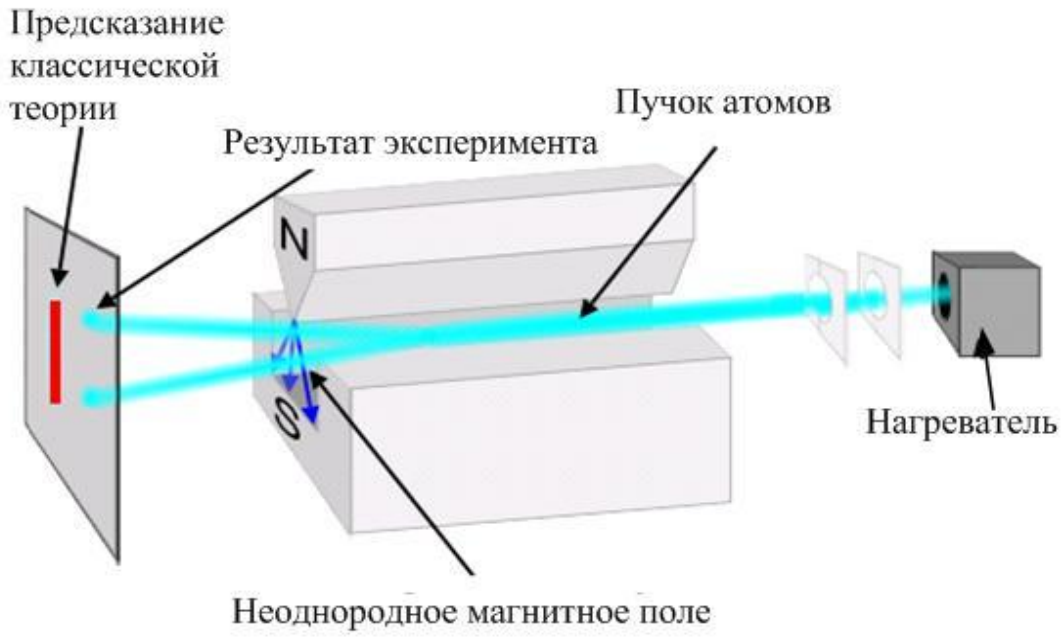


Рис.15.4

отклоняющая атомы в зависимости от угла α между индукцией $\vec{B}$ и моментом $\vec{p}_m$. По классической теории, все ориентации атомов и их моментов равновероятны: $0 \le \alpha \le \pi$, и след атомов на фотопластинке должен быть непрерывной полосой. Опыт дал другое: на фотопластинке получились две резких полосы (для атомов Li) или несколько резких полос (для других элементов). Эти результаты доказали, что возможны только некоторые ориентации момента в пространстве; только две проекции в случае лития, например.

Опыты Штерна и Герлаха подтвердили пространственное квантование моментов и что вообще магнитные моменты имеют дискретную природу. Возможны только дискретные проекции L_z механического момента импульса $\vec{L}$ атома (и, следовательно, магнитного момента $\vec{p}_m$ тоже) на направление внешнего поля, аналогично изображённым на рис.15.3 для спинового момента $\vec{L}_s$. Угол α между направлением поля и вектором момента не может быть произвольным.

4. Диамагнетизм

К диамагнетикам относятся вещества, магнитные моменты атомов которых равны нулю: $\vec{p}_m = 0$. Диамагнетиками являются инертные газы, молекулярные водород и азот, цинк, медь, золото, серебро, вода и т.д. Для них магнитная проницаемость $\mu < 1$, поле в диамагнетике ослабляется по сравнению с

индукцией в вакууме. На рис.15.5 показаны линии магнитной индукции для диамагнетика, помещённого во внешнее поле: внутри диамагнетика линии расположены реже, поскольку индукция там меньше.

Можно попытаться объяснить диамагнетизм в рамках классической модели (см., например, учебник Детлаф, Яворский, стр.261, 1989 г.). Однако существование спина у электрона в эту модель никак не укладывается, и классическая модель, в общем-то, неприемлема.

Короче, во внешнем поле диамагнетик приобретает магнитный момент, противоположный внешнему полю; $\vec{J} \uparrow\downarrow \vec{H}$. Поэтому диамагнетики выталкиваются из сильного поля: угол между магнитным моментом и полем в (15.17) $\alpha = \pi$, $\cos\alpha = -1$. Газы, входящие в состав продуктов сгорания, диамагнитны, поэтому пламя свечи отклоняется в неоднородном магнитном поле

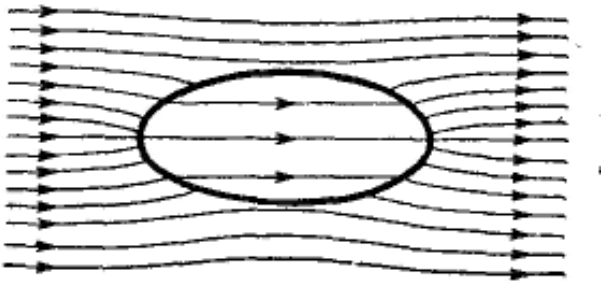


Рис.15.5

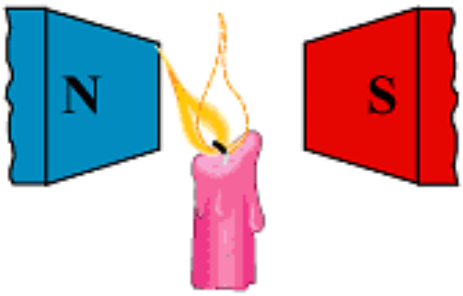


Рис.15.6

в сторону слабого поля (рис.15.6).

Диамагнитный эффект имеет место для всех веществ: и для пара-, и для ферромагнетиков, и даже для свободных электронов в магнитном поле (диамагнетизм Ландау). Но в пара- и ферромагнетиках диамагнитный эффект маскируется другими более сильными эффектами.

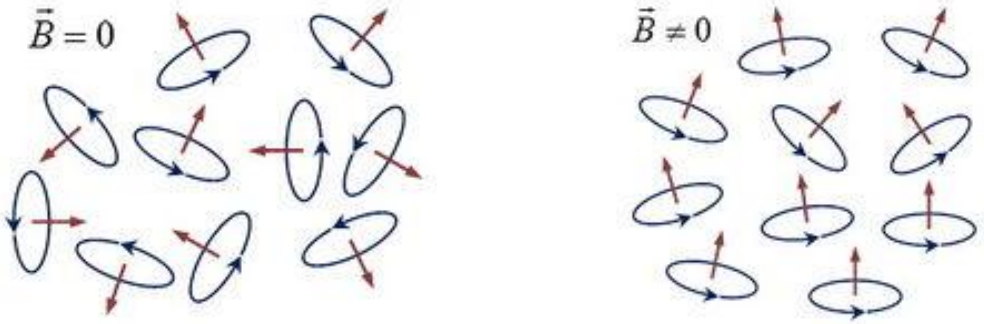
5. Парамагнетизм

К парамагнетикам относятся вещества, магнитные моменты атомов (молекул, ионов) которых отличны от нуля: $\vec{p}_m \neq 0$. Это многие металлы (Al, Li, Na, K), некоторые газы (O_2, NO). В отсутствие внешнего поля ориентация атомов хаотична (рис.15.7, а), и вещество в целом не имеет магнитного момента (не намагничено). Во внешнем магнитном поле магнитные моменты атомов ориентируются по полю (рис.15.7, б), так как на них действует вращающий момент силы:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \times \vec{B}\right].$$

Устанавливается некоторая преимущественная ориентация магнитных моментов атомов по полю, вещество приобретает магнитный момент, то есть намагничивается, причём намагниченность параллельна внешнему полю: $\vec{J} \uparrow\uparrow \vec{H}$.

Для парамагнетиков $\chi > 0$, $\mu > 1$, индукция в парамагнетике больше, чем в вакууме.



а б

Рис.15.7

Полной ориентации магнитных моментов мешает тепловое движение, поэтому с повышением температуры магнитная восприимчивость уменьшается (15.18), намагниченность тоже уменьшается.

$$\chi = \frac{C}{T}. \qquad (15.18)$$

Парамагнетики втягиваются в сильное поле.

Если продолжать аналогию между магнитным и электрическим полями, то диамагнетики аналогичны неполярным диэлектрикам, а парамагнетики – полярным, с той разницей, что напряжённость электрического поля в этих диэлектриках может только уменьшаться, а индукция магнитного поля в диамагнетиках уменьшается, а в парамагнетиках – увеличивается. Есть аналог и у сегнетоэлектриков, – это ферромагнетики.

6. Ферромагнетизм

К ферромагнетикам относятся следующие металлы и их сплавы: железо, никель, кобальт и ещё 6 элементов – Gd, Tb, Dy, Ho, Er и Tm. Чистых элементов, обладающих ферромагнитными свойствами, больше нет. Ферромагнетиками являются сплавы хрома и марганца с неферромагнитными элементами.

6.1. Свойства ферромагнетиков:

1. **Нелинейная зависимость намагниченности J от напряжённости поля H : $\chi \neq const$** (рис.15.8). На том же рисунке для сравнения приведены зависимости $J(H)$ для пара- и диамагнетиков.

2. **Ферромагнетики – сильномагнитные вещества**; в них индукция поля возрастает по сравнению с внешним полем в тысячи и более раз: магнитная проницаемость достигает значений $\mu \approx \chi \approx 10^3 \div 10^5$.

3. **Для ферромагнетиков характерно насыщение намагниченности**: начиная с некоторого значения напряжённости $H_{\text{Н}}$ внешнего поля намагниченность перестаёт расти, достигнув насыщения (рис.15.8 и 15.9).

4. **Магнитная восприимчивость зависит от предыстории**. Если уменьшать напряжённость внешнего поля, то кривая АВ зависимости $J(H)$ пойдёт выше, чем ***основная кривая намагничивания*** 0А (рис.15.9), а когда напряжённость внешнего поля будет равна нулю, ферромагнетик останется

намагниченным ($J_{ОСТ.}$), ферромагнетик стал постоянным магнитом. Для того чтобы убрать остаточную намагниченность, нужно подать внешнее поле напряжённостью H_C, направленное противоположно намагниченности (точка С). Величина H_C называется коэрцитивной силой: **коэрцитивная сила H_C – напряжённость такого внешнего поля, направленного противоположно намагниченности, при которой снимается остаточная намагниченность** (точнее, остаточная индукция; см. рис.15.16).

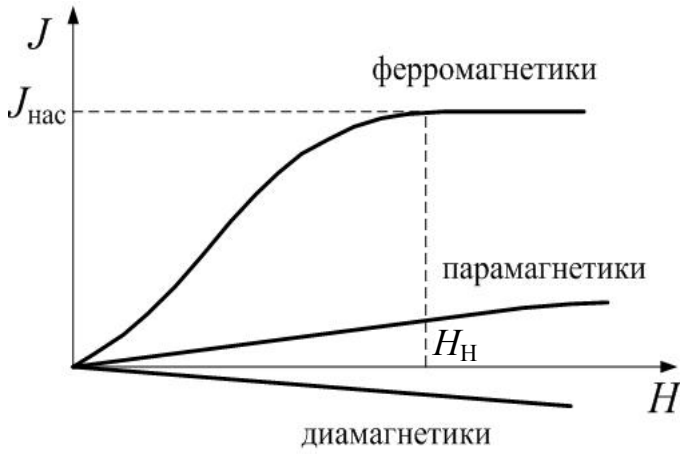


Рис.15.8

5. **Для ферромагнетиков характерен гистерезис**. При дальнейших изменениях внешнего поля можно получить снова насыщение намагниченности, но уже противоположного знака (точка D), а затем замкнуть кривую намагниченности до точки А (рис.15.9). Это – максимальный цикл. Если намагниченность не доводить до насыщения, периодически меняя направление и величину внешнего поля, можно получить частные циклы (рис. 15.10). Подобный график называется ***«петля гистерезиса»***. Само слово «***гистерезис***» значит «***запаздывание»***: изменения намагниченности запаздывают по сравнению с изменениями внешнего поля.

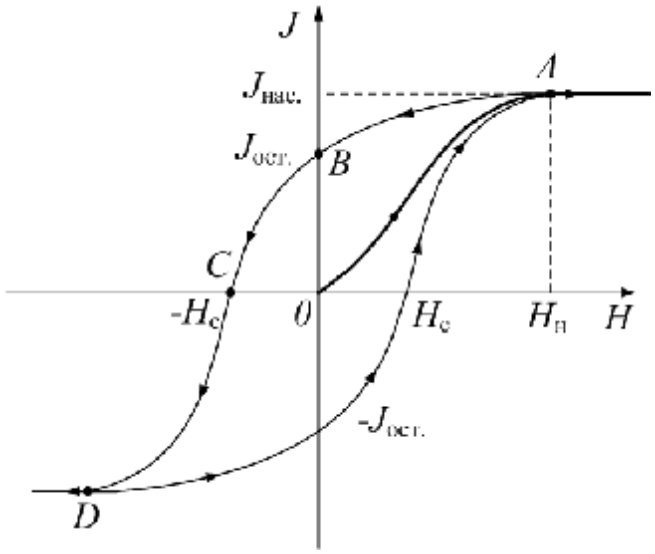


Рис.15.9

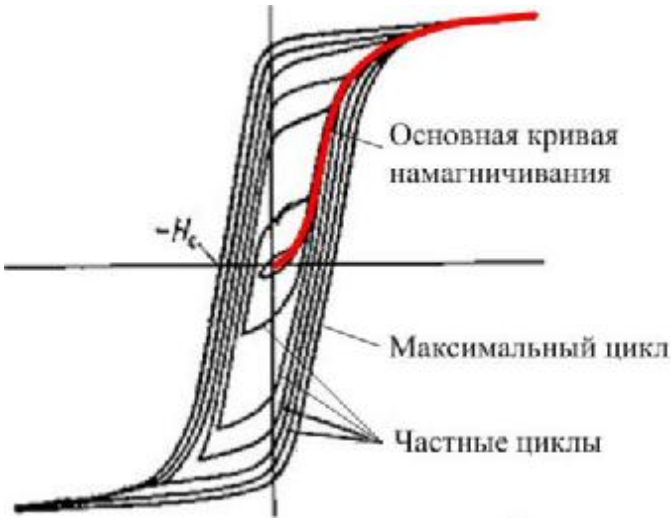


Рис.15.10

6. **При нагревании** выше некоторой температуры T_C – **точки Кюри ферромагнетик теряет свои свойства** и превращается в парамагнетик. У каждого магнетика T_C своя; например, для железа это 1043 К.

6.2. Природа ферромагнетизма

Ферромагнетизм можно объяснить только с квантовой точки зрения; объяснение в рамках классической модели невозможно.

За ферромагнетизм ответственны только спиновые моменты электронов. В атомах Fe, Ni и Co имеются незаполненные до конца внутренние электронные оболочки. Между такими атомами возникает особое взаимодействие – обменное. Оно связано с принципом неразличимости тождественных частиц: если два соседних атома обменяются электронами, то, в принципе, состояние не должно измениться (точнее, не меняется модуль волновой функции, которая в квантовой механике описывает состояние системы). Так что можно сказать, что обменные силы обусловлены волновыми свойствами электронов. Энергия обменного взаимодействия может быть определена на основе квантовомеханических расчетов. Для ферромагнетиков она положительна, поэтому в результате обменного взаимодействия **возникают силы, которые вынуждают спиновые магнитные моменты электронов ориентироваться параллельно друг другу** (рис.15.11,а). Это приводит к возникновению ***областей спонтанного*** (самопроизвольного) ***намагничивания*** в кристалле ферромагнетика – ***доменов*** (рис.15.12). Спонтанное намагничивание сразу всего ферромагнетика энергетически невыгодно. Для ***антиферромагнетиков*** обменная энергия отрицательна, и спиновые магнитные моменты соседних атомов ориентируются противоположно друг другу (рис.15.11, б); для них характерно отсутствие намагниченности.

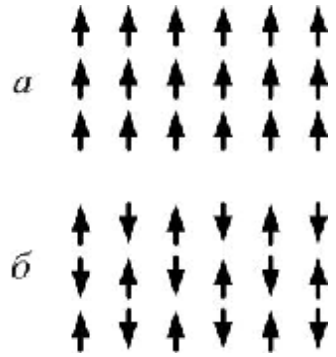


Рис.15.11

В каждом домене намагниченность достигла насыщения – все моменты параллельны друг другу. Размеры домена порядка ~10^{-6} м. Между доменами есть тонкий переходный слой толщиной порядка d~10^{-8} м, в котором ориентация моментов меняется постепенно (рис.15.13). В целом же ферромагнетик может быть ненамагничен, так как ориентация намагниченностей соседних доменов случайна, хаотична, и суммарный магнитный момент равен нулю.

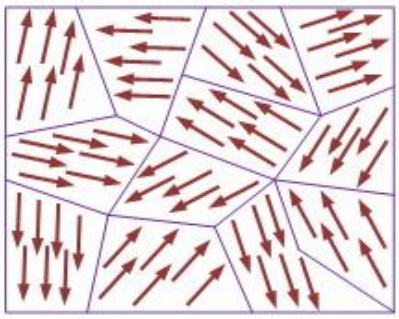


Рис.15.12

Во внешнем поле происходит рост доменов, ориентированных по полю (рис.15.14), а также скачкообразное изменение направления намагниченности доменов по полю – намагниченность растёт, пока все домены не сориентируются, и намагниченность образца достигнет насыщения. Если внешнее поле убрать, намагниченности доменов остаются ориентированными – это остаточная намагниченность, убрать которую можно, приложив поле $\boldsymbol{H}_C$ противоположного направления (коэрцитивное поле). Ферромагнетики, у которых коэрцитивное поле $\boldsymbol{H}_C$ не больше 100 А/м, считаются ***магнитомягкими***, их легко размагнитить, и петля гистерезиса у них узкая. Магнитомягкие ферромагнетики подходят для

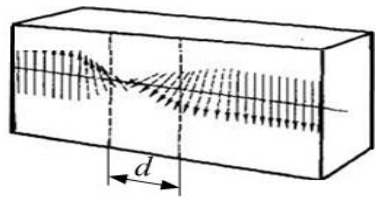


Рис.15.13

изготовления сердечников для электромагнитов, так как потери на перемагничивание меньше. Если коэрцитивная сила H_C >100 А/м, ферромагнетик – ***магнитожёсткий***; петля гистерезиса для него широкая, и такие ферромагнетики подходят для изготовления постоянных магнитов, так как у них большая остаточная намагниченность.

При нагревании ферромагнетика его магнитная проницаемость

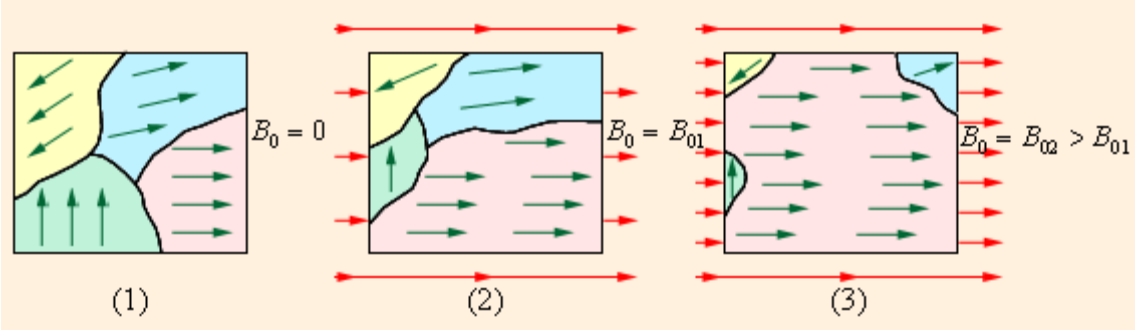


Рис.15.14

увеличивается, так как облегчаются процессы смещения доменных границ. При температуре, равной или выше точки Кюри T_C в результате теплового движения ионов, находящихся в узлах кристаллической решетки, домены разрушаются, и материал переходит в парамагнитное состояние (рис. 15.15).

Рассмотрим, как изменяется индукция поля при намагничивании ферромагнетика (рис.15.16). Здесь 0А – основная кривая намагничивания.

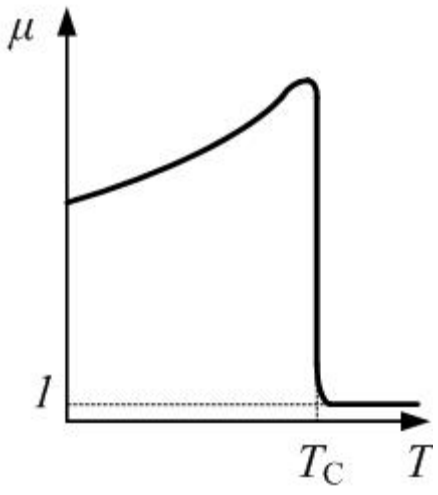


Рис.15.15

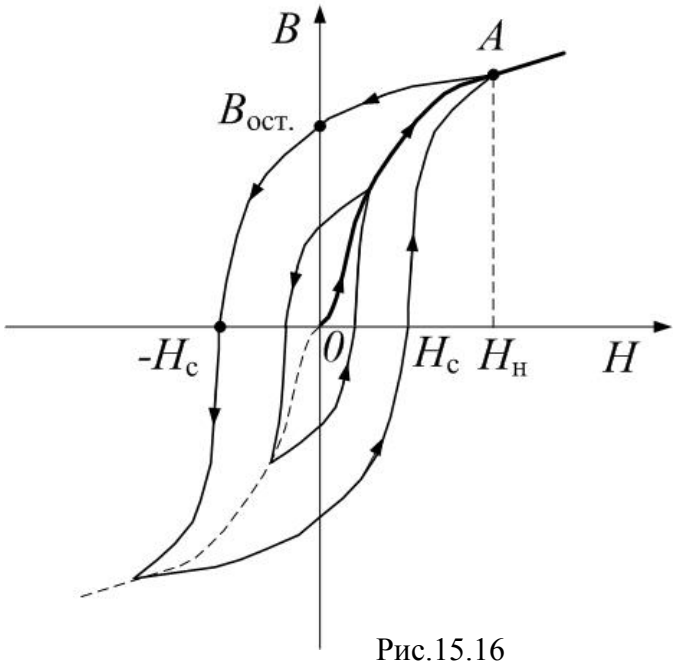


Рис.15.16

Индукция растёт нелинейно с возрастанием напряжённости внешнего поля. Так же, как и для зависимости $J = f(H)$, для $B = f(H)$ наблюдается гистерезис. Максимальные значения индукции и напряжённости для частных циклов лежат на основной кривой намагничивания. На рис. 15.17 для сравнения приведены зависимости $J = f(H)$, $B = f(H)$ и $\mu = f(H)$.

Из (15.2-15.4):

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J}\,, \qquad (15.19)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}\,. \qquad (15.20)$$

При достижении насыщения $J = J_{\text{нас}} = const$, т.е. при $H > H_{\text{н}}$ (точка А на рис.15.9 и 15.16), зависимость $B = f(H)$ становится линейной, т.к. из (15.20):

$$B = \mu_0 H + const\,.$$

Магнитная проницаемость по (15.8) равна:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H},$$

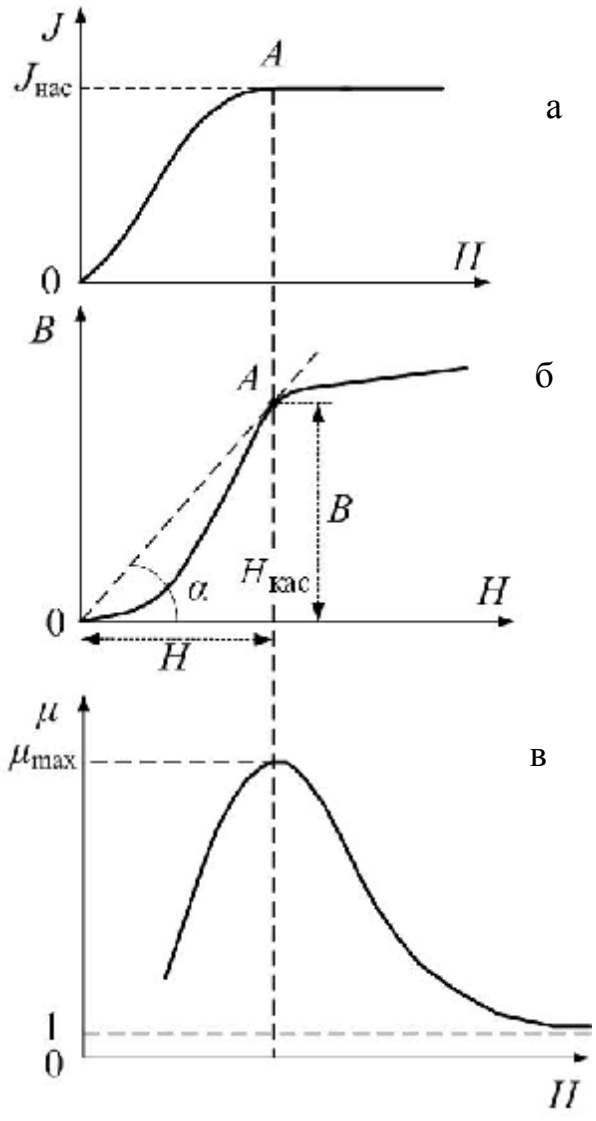


Рис.15.17

или из (15.20):

$$\mu = \frac{\mu_0 H + \mu_0 J}{\mu_0 H} = 1 + \frac{J}{H}\,.$$

При $H \to \infty$:

$$\mu = 1 + \frac{J}{H} = 1 + \frac{J_{\text{нас}}}{H}$$

$$\mu = 1 + \frac{const}{H} \to 1\,.$$

Зависимость магнитной проницаемости μ от напряжённости поля можно получить графически. Из (15.8) следует, что для любой точки графика зависимости $B = f(H)$ магнитная проницаемость μ пропорциональна тангенсу угла α (рис.15.17, б):

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} \sim \frac{B}{H} = tg\alpha\,.$$

Максимальное значение μ соответствует точке А касания на графике $B = f(H)$ (практически совпадает с точкой перегиба): $\mu_{\max} = \mu(H_{\text{кас}})$ – рис. 15.17, в.

Ферромагнетики, как и парамагнетики, втягиваются в область сильного поля: вспомните, как гвозди прилипают к магниту.

6.3. Ферримагнетизм

Ферримагнетики (ферриты) состоят как бы из двух встроенных друг в друга решёток с магнитными моментами, направленными навстречу друг другу (рис.15.18, в) или имеющими более сложную пространственную ориентацию (рис.15.18, г). Векторная сумма намагниченностей подрешёток отлична от нуля, поэтому для ферритов, как и для ферромагнетиков, характерна самопроизвольная намагниченность. Можно считать, что ферримагнетизм – наиболее общий случай

магнитоупорядоченного состояния: ферромагнетизм есть частный случай ферримагнетизма, когда в веществе имеется только одна подрешётка (рис.15.18, а), антиферромагнетизм – частный случай ферримагнетизма, когда моменты подрешёток компенсируют друг друга, а собственно в феррите такой компенсации нет.

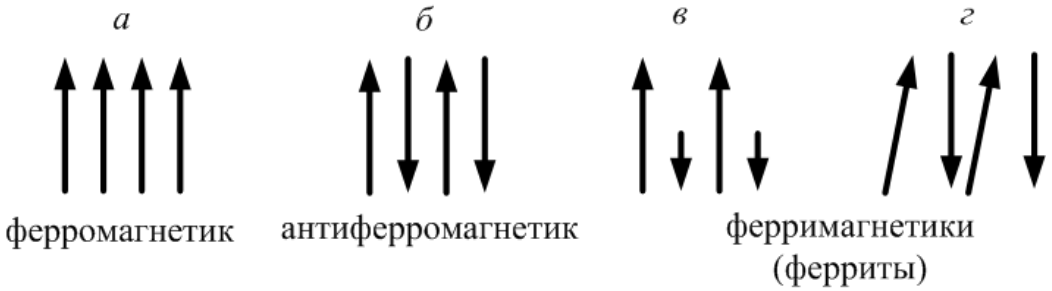


Рис.15.18

Ферриты по своим электрическим свойствам – полупроводники: имеют удельное электрическое сопротивление, в миллиарды раз превышающее сопротивление металлических ферромагнетиков. Это практически исключает возникновение в ферритах вихревых токов в переменных магнитных полях. Благодаря таким уникальным свойствам ферриты находят широкое применение в радиоэлектронике.

7. Закон полного тока для магнитного поля в веществе

По закону полного тока для магнитного поля в вакууме, циркуляция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ для поля ***в вакууме*** по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охваченных контуром, умноженной на магнитную постоянную μ_0:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i \,. \qquad (15.21)$$

В веществе нужно учитывать также микротоки; индукция результирующего поля определяется суммой внешнего поля токов проводимости (макротоков) и поля микротоков вещества: $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$, тогда для поля в магнетике:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum_i I_i^{\text{макро}} + \sum_k I_k^{\text{микро}} \right). \qquad (15.22)$$

Индукцию поля микротоков можно учесть автоматически, введя магнитную проницаемость μ. Индукция внешнего поля в веществе возрастает в μ раз: $B = \mu\mu_0 H = \mu \cdot B_0$, тогда

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum_i I_i^{\text{макро}} \,. \qquad (15.23)$$

Для напряжённости поля:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_i^{\text{макро}} \,. \qquad (15.24)$$

Циркуляция вектора напряжённости магнитного поля равна алгебраической сумме макротоков (токов проводимости), охваченных контуром.

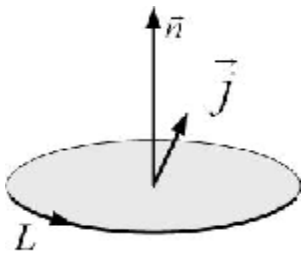


Рис.15.19

Если заданы не токи, а плотность тока, то

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \vec{j}^{\text{макро}} d\vec{S}, \qquad (15.25)$$

здесь интеграл берётся по любой поверхности, натянутой на контур L (рис.15.19).

8. Условия для магнитного поля на границе раздела двух изотропных сред

Рассмотрим поле на границе раздела двух изотропных сред. Пусть $\mu_1 > \mu_2$, тогда $B_1 > B_2$. Возьмём замкнутую поверхность в виде цилиндра с основанием S (рис.15.20) и запишем теорему Гаусса для магнитного поля:

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \oint_S B_n \cdot dS = 0.$$

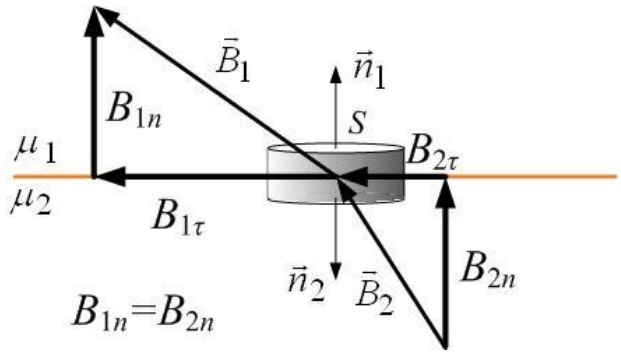


Рис.15.20

Через боковую поверхность цилиндра магнитный поток мал, его можно не учитывать, тогда

$$\oint_S B_n \cdot dS = B_{2n}S - B_{1n}S = 0,$$

$$B_{2n} = B_{1n}. \qquad (15.26)$$

Нормальная составляющая индукции непрерывна на границе магнетиков.

Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то

$$B_n = \mu\mu_0 H_n \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} B_{1n} = \mu_1\mu_0 H_{1n} \\ B_{2n} = \mu_2\mu_0 H_{2n} \end{cases} \Rightarrow \qquad \mu_1\mu_0 H_{1n} = \mu_2\mu_0 H_{2n},$$

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n},$$

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \qquad (15.27)$$

Нормальная составляющая напряжённости на границе магнетиков испытывает разрыв.

Возьмём замкнутый контур в виде узкого прямоугольника, длинные стороны которого параллельны границе раздела магнетиков (рис.15.21). Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля (15.24). Если токов проводимости вдоль границы раздела нет, то

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = 0.$$

Вклады в интеграл вдоль коротких сторон контура ничтожно малы, тогда

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = H_{2\tau} \cdot l - H_{1\tau} \cdot l = 0,$$

$$H_{2\tau} = H_{1\tau}. \qquad (15.28)$$

Касательная составляющая напряжённости непрерывна.

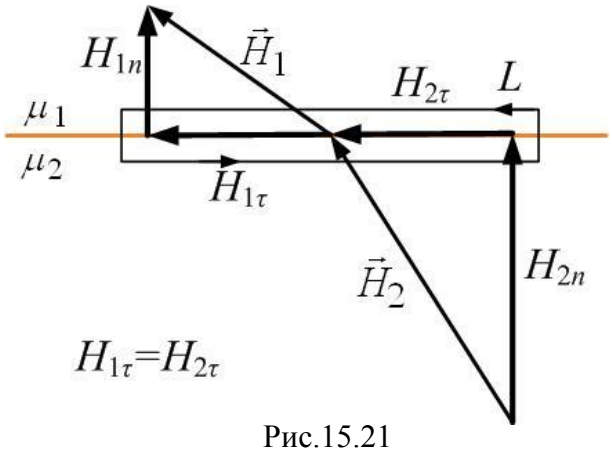


Рис.15.21

Далее из $B = \mu\mu_0 H$ получим

$$B_\tau = \mu\mu_0 H_\tau \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} H_{1\tau} = \dfrac{B_{1\tau}}{\mu_1\mu_0} \\ H_{2\tau} = \dfrac{B_{2\tau}}{\mu_2\mu_0} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{B_{1\tau}}{\mu_1\mu_0} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2\mu_0},$$

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2},$$

$$\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \qquad (15.29)$$

Касательная составляющая индукции на границе магнетиков испытывает разрыв.

Линии индукции на границе испытывают преломление. Можно найти соотношение между углами α_1 и α_2 (рис.15.22):

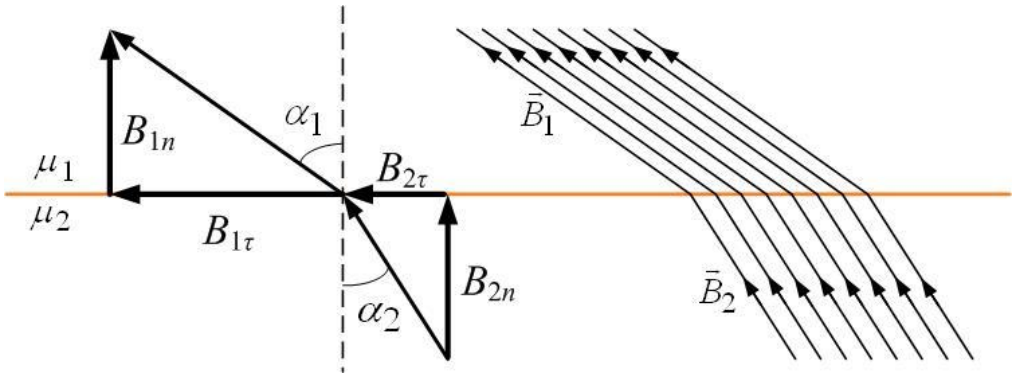


Рис.15.22

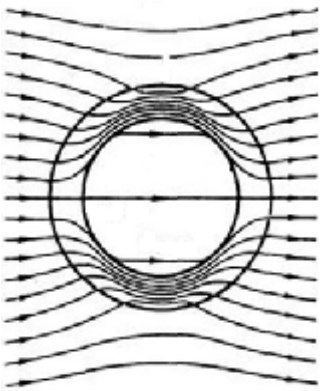


Рис.15.23

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{B_{1\tau} \big/ B_{1n}}{B_{2\tau} \big/ B_{2n}} = \frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \qquad (15.30)$$

Угол к нормали больше в магнетике с бо́льшей магнитной проницаемостью μ, в таком магнетике линии индукции сгущаются (индукция $\vec{B}$ больше). Это свойство используют, например, для экранирования от внешних полей: внутри ферромагнитного полого цилиндра поля почти нет, так как линии сгущаются в толще ферромагнетика (рис.15.23).

То же самое свойство используется для создания сильных полей в зазоре сердечника электромагнита: линии поля $\vec{B}$ замкнуты; концентрируются в ферромагнитном сердечнике. Поскольку $B_{2n} = B_{1n}$, в зазоре индукция практически такая же, как в сердечнике, то есть в тысячи и десятки тысяч ($\mu \approx 10^4$) раз больше, чем была бы без ферромагнитного сердечника.

Рассчитаем индукцию поля в зазоре толщиной d ферромагнитного сердечника с магнитной проницаемостью μ тороидальной катушки со средним радиусом R (рис.15.24). По закону полного тока

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_i^{\text{макро}} = N \cdot I,$$

где N – число витков катушки. Циркуляция равна:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = H_1 (2\pi R - d) + H_2 \cdot d,$$

где H_1 – напряжённость поля в сердечнике, H_2 – в зазоре. Магнитное поле перпендикулярно границе раздела сердечник-зазор, тогда по (15.27):

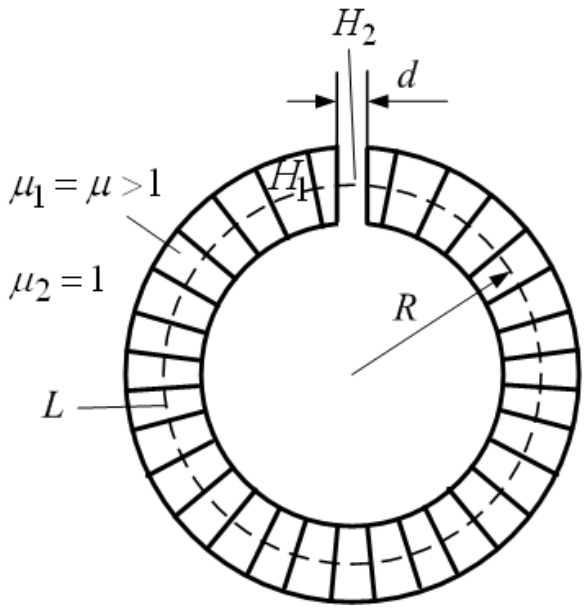


Рис.15.24

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{\mu},$$

$$H_2 = \mu \cdot H_1,$$

$$H_1 (2\pi R - d) + \mu \cdot H_1 \cdot d = N \cdot I,$$

$$H_1 (2\pi R - d + \mu \cdot d) = N \cdot I,$$

$$H_1 = \frac{N \cdot I}{2\pi R + d(\mu - 1)},$$

$$\mu_0 H_2 = B_2 = B_1 = \mu \mu_0 H_1,$$

$$B_2 = \frac{\mu \mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi R + d(\mu - 1)}.$$

Лекция 7 (16)

Электромагнитная индукция. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

План

1. Явление электромагнитной индукции
2. ЭДС индукции в движущемся проводнике
3. ЭДС индукции в неподвижном проводнике
4. Самоиндукция. Индуктивность
5. Взаимная индукция
6. Энергия магнитного поля в неферромагнитной изотропной среде
7. Работа по перемагничиванию ферромагнетика
8. Теория Максвелла
   - 8.1. Первое уравнение Максвелла
   - 8.2. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла
   - 8.3. Теорема Остроградского-Гаусса. Третье и четвёртое уравнения Максвелла
   - 8.4. Полная система уравнений Максвелла
   - 8.5. Частные случаи: стационарное поле; поле в свободном пространстве

1. Явление электромагнитной индукции

При перемещении проводника в магнитном поле под действием силы Ампера (рис.16.1) совершается работа (см.предыдущую лекцию)

$$dA_A = I \cdot d\Phi . \qquad (16.1)$$

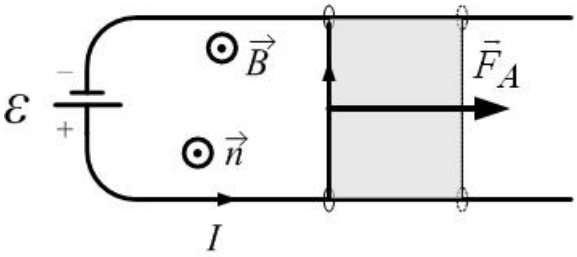


Рис.16.1

Эта работа совершается за счёт энергии источника. Полная работа источника равна

$$dA_{\text{ист.}} = \mathcal{E} \cdot I \cdot dt$$

и по закону сохранения энергии расходуется и на перемещение проводника (16.1), и на нагрев проводов. Выделяющаяся теплота по закону Джоуля-Ленца равна

$$dQ = I^2 \cdot R \cdot dt ,$$

где R – полное сопротивление цепи. То есть,

$$dA_{\text{ист.}} = dA_A + dQ ,$$

$$\mathcal{E} \cdot I \cdot dt = I \cdot d\Phi + I^2 \cdot R \cdot dt ,$$

$$\mathcal{E} \cdot dt = d\Phi + I \cdot R \cdot dt ,$$

$$I \cdot R \cdot dt = \mathcal{E} \cdot dt - d\Phi ,$$

$$I \cdot R = \mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}}{R} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i}{R} .$$

Последнее выражение представляет собой закон Ома для полной цепи, причём в числителе, кроме ЭДС источника, появилось ещё одно слагаемое, которое естественно интерпретируется тоже как ЭДС. Это – ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (16.2)$$

Получен **закон Фарадея: ЭДС индукции в замкнутом контуре равна по величине и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока через поверхность, натянутую на этот контур**.

Знак «минус» в (16.2) является следствием закона сохранения энергии: если бы минуса не было, появившийся из-за ЭДС индукции дополнительный ток (индукционный ток $I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$) провоцировал бы дальнейшее изменение магнитного потока, что вело бы опять же к увеличению индукционного тока и так до бесконечности, а такого быть не может – энергия для возросшего до бесконечности тока тоже требовалась бы бесконечная. Отсюда – **правило Ленца: собственное магнитное поле индукционного тока препятствует изменению магнитного потока, вызвавшего индукционный ток.**

Закон Фарадея (16.2) здесь получен для одного частного случая (деформации контура), но он **универсален**: ЭДС индукции можно вычислять по (16.2) независимо от того, каким способом изменяется магнитный поток $d\Phi = B \cdot dS \cdot \cos\alpha$:

1) можно деформировать контур (изменяем площадь);
2) перемещать контур (изменять ориентацию контура в пространстве – угол α);
3) изменять индукцию поля $\vec{B}$.

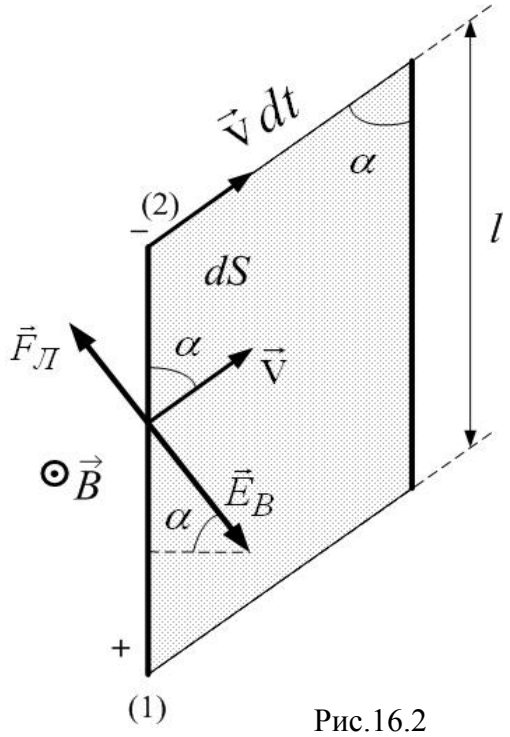


Рис.16.2

2. ЭДС индукции в движущемся проводнике можно объяснить возникновением силы Лоренца. Пусть проводник длиной l движется в плоскости, перпендикулярной индукции поля $\vec{B}$, и скорость $\vec{v}$ направлена под углом α к проводнику (рис.16.2).

Электроны проводника движутся вместе с проводником, и на них действует сила Лоренца

$$\vec{F}_Л = (-e)\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$$

$$F_Л = evB\sin 90^0,$$

что эквивалентно действию поля сторонних сил с напряжённостью

$$\vec{E}_B = \frac{\vec{F}_Л}{(-e)} = \left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$$

$$E_B = v \cdot B.$$

Под действием силы Лоренца электроны проводника перемещаются вдоль проводника (вверх на рис.16.2). Между точками (1) и (2) на концах проводника возникает разность потенциалов.

ЭДС (в данном случае – ЭДС индукции) по определению равна

$$\mathcal{E}_i = \int_1^2 \vec{E}_B d\vec{l} \ ,$$

$$\mathcal{E}_i = \int_1^2 \left[\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}\right] \cdot d\vec{l} = -\int_0^l \mathrm{v} \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot dl = -\mathrm{v} \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot l \ . \qquad (16.3)$$

То же самое можно получить по закону Фарадея (16.2). Площадь, заметённая проводником в процессе движения, равна

$$dS = \mathrm{v} \cdot dt \cdot l \cdot \sin\alpha \ ;$$

пересечённый магнитный поток

$$d\Phi = B \cdot dS \ ;$$

ЭДС индукции по (16.2)

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B \cdot dS}{dt} = -\frac{B \cdot \mathrm{v} \cdot dt \cdot l \cdot \sin\alpha}{dt} = -B \cdot \mathrm{v} \cdot l \cdot \sin\alpha \ .$$

3. ЭДС индукции в неподвижном проводнике

ЭДС индукции, возникающую в неподвижном проводнике при изменении индукции магнитного поля, объяснить силой Лоренца нельзя. **Максвелл предположил, что всякое переменное магнитное поле порождает в пространстве электрическое поле $\vec{E}_B$, которое и является причиной возникновения индукционного тока.** Поле $\vec{E}_B$ имеет неэлектростатическое происхождение. Короче, если $\frac{d\vec{B}}{dt} \neq 0$, то возникает поле $\vec{E}_B$. По аналогии с предыдущим случаем для любого замкнутого контура L, мысленно выделенного в пространстве:

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_B d\vec{l} \ .$$

По закону Фарадея:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где $d\Phi$ – изменение магнитного потока за время dt через поверхность, натянутую на контур L (рис.15.3).

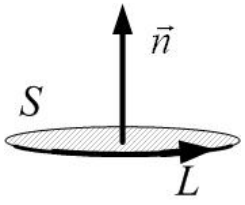


Рис.16.3

По определению магнитного потока

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \ ,$$

Тогда

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \ .$$

Операции дифференцирования по времени и интегрирования по пространству независимы друг от друга, поэтому их можно поменять местами; при этом производная будет частной (по времени):

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\,.$$

Как видно, циркуляция вектора $\vec{A}_B$ отлична от нуля, то есть это ***поле вихревое, непотенциальное***.

Окончательно:

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\,. \qquad (16.4)$$

Циркуляция напряжённости вихревого электрического поля $\vec{E}_B$, порождённого изменяющимся магнитным полем $\vec{B}$, по произвольному замкнутому контуру равна по величине и противоположна по знаку потоку производной индукции магнитного поля $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ через поверхность, натянутую на этот контур.

4. Самоиндукция. Индуктивность

Контур с током I создаёт в окружающем пространстве магнитное поле, индукция которого пропорциональна силе тока: $B \sim I$ (рис.16.4).

Магнитный поток через поверхность, натянутую на контур, пропорционален индукции (по определению потока $\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S}$):

$$\Phi \sim B \sim I\,.$$

Введём **коэффициент пропорциональности между током в контуре и магнитным потоком – индуктивность контура** L:

$$\Phi = L\cdot I\,, \qquad (16.5)$$

или:

$$L = \frac{\Phi}{I}. \qquad (16.5а)$$

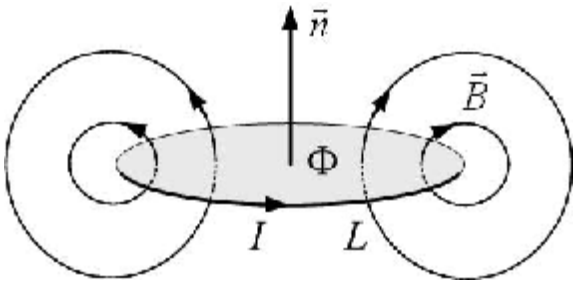


Рис.16.4

Индуктивность контура численно равна магнитному потоку, пронизывающему контур, если сила тока в контуре равна 1 А.

Для катушки с N витками нужно учитывать суммарный магнитный поток сквозь все витки, то есть полное потокосцепление Ψ:

$$\Psi = N\cdot\Phi\,, \qquad (16.6)$$

$$L = \frac{\Psi}{I}. \qquad (16.6а)$$

Индуктивность контура зависит от формы контура, его размеров и магнитных свойств среды. Размерность

$$[L]=\frac{[\Phi]}{[I]}=\frac{Вб}{А}=Гн \quad \text{(генри)}.$$

Пример: индуктивность длинного соленоида. Индукция поля длинного соленоида

$$B=\mu_0\mu\cdot n\cdot I=\mu_0\mu\cdot\frac{N}{l}\cdot I\,,$$

где n – плотность намотки (число витков на единицу длины):

$$n=\frac{N}{l}. \tag{16.7}$$

Магнитный поток через сечение соленоида

$$\Phi=B\cdot S=\mu_0\mu\cdot\frac{N}{l}\cdot I\cdot S\,.$$

Полное потокосцепление:

$$\Psi=N\cdot\Phi=\mu_0\mu\cdot\frac{N^2}{l}\cdot I\cdot S\,.$$

Индуктивность:

$$L=\frac{\Psi}{I}=\frac{\mu_0\mu\cdot\dfrac{N^2}{l}\cdot I\cdot S}{I},$$

$$L=\mu_0\mu\cdot\frac{N^2}{l}S\,. \tag{16.8}$$

или, с учётом (16.7):

$$L=\mu_0\mu\cdot n^2 l\cdot S\,. \tag{16.8а}$$

Поскольку $l\cdot S=V$ – объём соленоида, то

$$L=\mu_0\mu\cdot n^2 V\,. \tag{16.8б}$$

Если в контуре изменяется сила тока, то пропорционально будет меняться и магнитный поток, что приведёт к возникновению ЭДС индукции в контуре (закон Фарадея). Это – явление самоиндукции. **Самоиндукция – возникновение ЭДС индукции в контуре при изменении силы тока в нём**.

$$\mathcal{E}_{si}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}(L\cdot I).$$

Будем считать коэффициент самоиндукции L постоянным, тогда

$$\mathcal{E}_{si}=-L\cdot\frac{dI}{dt}. \tag{16.9}$$

При замыкании или размыкании цепи токи резко меняются. Если индуктивность контура велика, то из-за возникновения ЭДС самоиндукции индукционный ток может быть много больше тока, на который рассчитана нагрузка:

$$I_i=\left|\frac{\mathcal{E}_{si}}{R}\right|=\frac{L}{R}\cdot\frac{dI}{dt}>>I\,.$$

Такие токи называются ***экстратоками замыкания или размыкания.*** Именно возникновение экстратоков объясняет, почему лампочки чаще перегорают в момент включения или выключения.

5. Взаимная индукция

Рассмотрим два контура L_1 и L_2 с токами I_1 и I_2 соответственно, расположенные не слишком далеко друг от друга так, чтобы линии индукции B_1 поля, созданного током I_1 первого контура, пронизывали второй контур (рис.16.5).

Магнитный поток Φ_2 через второй контур пропорционален индукции B_1 поля, созданного первым током, а индукция B_1 пропорциональна току I_1:

$$\Phi_2 \sim B_1 \sim I_1 .$$

Введём **коэффициент пропорциональности между током в одном контуре и магнитным потоком через второй контур – коэффициент взаимной индукции двух контуров**:

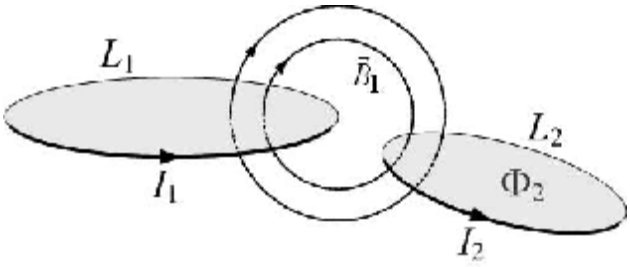


Рис.16.5

$$\Phi_2 = L_{21} \cdot I_1 , \qquad (16.10)$$

или:

$$L_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1} . \qquad (16.10а)$$

Аналогично, если ток I_2 второго контура создаёт поле с индукцией B_2, то магнитный поток Φ_1, пронизывающий первый контур, пропорционален току I_2:

$$\Phi_1 = L_{12} \cdot I_2 . \qquad (16.11)$$

Можно показать, что коэффициент пропорциональности в (16.10) и (16.11) один и тот же:

$$L_{21} = L_{12} .$$

Коэффициент взаимной индукции зависит от формы, размеров обоих контуров, из взаимного расположения и магнитных свойств окружающей среды. Как и коэффициент самоиндукции, он измеряется в генри:

$$[L_{21}] = \text{Гн} .$$

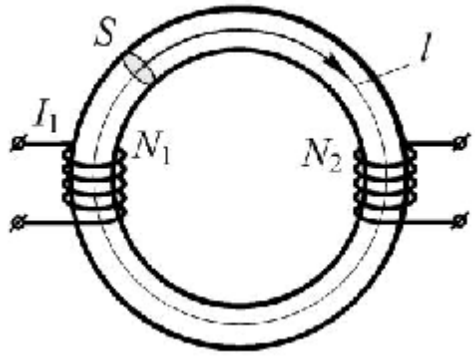


Рис.16.6

Пример: рассмотрим две катушки на общем ферромагнитном сердечнике (рис.16.6). Число витков первой катушки равно N_1, второй – N_2; длина сердечника (тороида) по средней линии равна l, площадь сечения тороида – S. Линии индукции B_1 магнитного поля, созданного током первой катушки, пронизывают все витки второй катушки, причём

$$B_1 = \mu_0 \mu \cdot \frac{N_1 I_1}{l} ;$$

магнитный поток через сечение сердечника

$$\Phi = B_1 S = \mu_0 \mu \cdot \frac{N_1 I_1}{l} S ;$$

полное потокосцепление – суммарный поток через все N_2 витков второй катушки

$$\Psi_2 = N_2\Phi = \mu_0\mu \cdot \frac{N_1 N_2 I_1}{l} S;$$

коэффициент взаимной индукции катушек

$$L_{21} = \frac{\Psi_2}{I_1} = \mu_0\mu \cdot \frac{N_1 N_2}{l}. \qquad (16.12)$$

Заметим, что $L_{21} = \sqrt{L_1 L_2}$ для случая, когда поток, созданный одной катушкой, полностью пронизывает и все витки второй катушки.

Если изменяется сила тока I_1 в первом контуре, то по закону Фарадея и по (16.10) ЭДС индукции во втором контуре равна:

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(L_{21} \cdot I_1\right) = -L_{21} \cdot \frac{dI_1}{dt}. \qquad (16.13)$$

Симметрично, при изменении тока во втором контуре ЭДС индукции в первом будет равна:

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(L_{12} \cdot I_2\right) = -L_{12} \cdot \frac{dI_2}{dt}. \qquad (16.13а)$$

Явление взаимной индукции – это возникновение ЭДС индукции в одном контуре при изменении тока в другом контуре.

6. Энергия магнитного поля в неферромагнитной изотропной среде

При замыкании ключа К (рис.16.7) в цепи начинает течь ток, и спустя некоторое время устанавливается его постоянное значение I, а в катушке – стационарное магнитное поле B. Будем считать, что сопротивление проводов и источника пренебрежимо мало (R=0), тогда по закону сохранения энергии работа источника идёт только на создание магнитного поля в соленоиде:

$$A_{\text{ист.}} = W_{\text{м.}} \qquad (16.14)$$

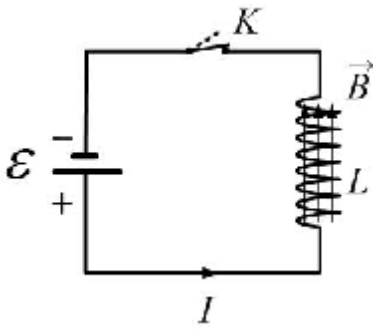


Рис.16.7

По второму правилу Кирхгофа для замкнутого контура $\sum\mathcal{E} = \sum(IR)$, или в данном случае $\mathcal{E} + \mathcal{E}_{si} = 0$, – ЭДС здесь две: ЭДС источника тока $\mathcal{E}$ и ЭДС самоиндукции в катушке индуктивности:

$$\mathcal{E}_{si} = -L \cdot \frac{dI}{dt}.$$

Тогда

$$\mathcal{E} = -\mathcal{E}_{si} = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Работа источника тока:

$$A_{\text{ист.}} = \int_0^\infty dA_{\text{ист.}} = \int_0^\infty \mathcal{E} \cdot I \cdot dt = \int_0^\infty L \cdot \frac{dI}{dt} \cdot I \cdot dt = \int_0^I L \cdot I \cdot dI = L \cdot \int_0^I I \cdot dI = \frac{L \cdot I^2}{2}.$$

Отсюда энергия магнитного поля катушки

$$W_{\text{м.}} = \frac{L \cdot I^2}{2}. \qquad (16.15)$$

По определению (16.5) $\Phi = L \cdot I$, тогда

$$W_{\text{м.}} = \frac{\Phi \cdot I}{2}, \qquad (16.16)$$

$$W_{\text{м.}} = \frac{\Phi^2}{2L}. \qquad (16.17)$$

Если у катушки больше одного витка, нужно заменить поток Φ на полное потокосцепление Ψ:

$$W_{\text{м.}} = \frac{\Psi \cdot I}{2}, \qquad (16.16а)$$

$$W_{\text{м.}} = \frac{\Psi^2}{2L}. \qquad (16.17а)$$

Эта энергия локализована в пространстве, где создано магнитное поле. Рассчитаем объёмную плотность энергии, считая поле однородным. По определению, **объёмная плотность энергии – это энергия единицы объёма**:

$$w = \frac{W}{V}. \qquad (16.18)$$

Тогда из (16.15) и (16.8б):

$$w_{\text{м.}} = \frac{W}{V} = \frac{L \cdot I^2}{2 \cdot V} = \frac{\mu_0 \mu \cdot n^2 V \cdot I^2}{2 \cdot V} = \frac{\mu_0 \mu \cdot n^2 \cdot I^2}{2} = \frac{(\mu_0 \mu \cdot n \cdot I) \cdot (n \cdot I)}{2}.$$

Здесь в первых скобках – индукция поля соленоида; во вторых – напряжённость поля соленоида:

$$B = \mu_0 \mu \cdot n \cdot I, \qquad (16.19)$$

$$H = n \cdot I. \qquad (16.20)$$

Тогда

$$w_{\text{м.}} = \frac{B \cdot H}{2}. \qquad (16.21)$$

Поскольку $B = \mu_0 \mu \cdot H$, можно записать по-другому:

$$w_{\text{м.}} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}, \qquad (16.22)$$

$$w_{\text{м.}} = \frac{\mu_0 \mu \cdot H^2}{2}. \qquad (16.23)$$

7. Работа по перемагничиванию ферромагнетика

Имеется катушка с ферромагнитным сердечником. Ток в катушке периодически изменяется, ферромагнетик при этом перемагничивается. Изменения индукции B поля в ферромагнетике отстают от изменений напряжённости H, – возникает гистерезис (рис.16.8).

Работу по перемагничиванию ферромагнетика можно получить как произведение силы тока на изменение магнитного потока (точнее, полного потокосцепления в катушке):

$$dA = I \cdot d\Psi . \qquad (16.1)$$

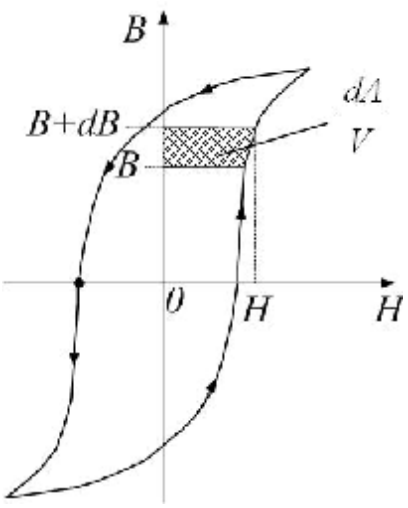


Рис.16.8

Здесь

$$\left.\begin{aligned} \Psi &= N \cdot \Phi \\ N &= n \cdot l \\ \Phi &= B \cdot S \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Psi = B \cdot S \cdot n \cdot l$$

$$d\Psi = S \cdot n \cdot l \cdot dB = n \cdot V \cdot dB .$$

Из (16.20) заменим $n \cdot I = H$, тогда работа по перемагничиванию при изменении индукции на dB равна:

$$dA = I \cdot n \cdot V \cdot dB = H \cdot V \cdot dB .$$

Работа в расчёте на единицу объёма:

$$\frac{dA}{V} = H \cdot dB . \qquad (16.24)$$

Она равна площади заштрихованной на графике (16.8) полоски. Работа по перемагничиванию единицы объёма ферромагнетика за один цикл равна площади петли гистерезиса, то есть интегралу:

$$\frac{A_{\text{пер.}}}{V} = \oint \frac{dA}{V} = \oint H \cdot dB = \text{площади петли гистерезиса} . \qquad (16.25)$$

Чем *уже* петля гистерезиса (меньше коэрцитивная сила H_C), тем меньше потери на перемагничивание; поэтому для изготовления сердечников электромагнитов применяют магнитомягкие ферромагнетики.

8. Теория Максвелла

Теория Максвелла для электромагнитного поля – это обобщение теоремы Остроградского-Гаусса, закона полного тока и закона электромагнитной индукции Фарадея. Теория решает задачу электродинамики: найти характеристики электрического и магнитного полей системы зарядов и токов.

8.1. Первое уравнение Максвелла

По теореме о циркуляции вектора напряжённости $\vec{E}_q$ электроСТАТИЧЕСКОГО поля (то есть поля, созданного неподвижными зарядами):

$$\oint_L \vec{E}_q d\vec{l} = 0 .$$

По (16.4) циркуляция вектора напряжённости $\vec{E}_B$ поля, созданного изменяющимся магнитным полем:

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} .$$

Поверхность S натянута на контур L (рис.16.9). Сложим почленно эти два уравнения:

$$\oint_L \left(\vec{E}_q + \vec{E}_B\right) d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

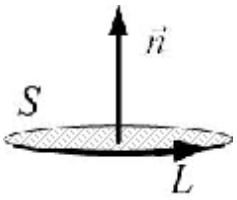


Рис.16.9

где $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$ – напряжённость суммарного (полного) электрического поля. Тогда

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \qquad \textbf{(I)}$$

Это – первое уравнение Максвелла в интегральной форме. Его смысл: электрические поля создаются как электрическими зарядами, так и изменяющимся магнитным полем.

Дифференциальную форму первого уравнения Максвелла можно получить, если воспользоваться математической теоремой Стокса: для любого векторного поля (в том числе поля $\vec{E}$)

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \left(rot\vec{E}\right) \cdot d\vec{S}, \qquad (16.26)$$

где $rot\vec{E}$ – ротор векторного поля; своего рода оператор векторного дифференцирования. Ротор проще всего записать в виде определителя:

$$rot\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \qquad (16.27)$$

Таким образом, например, проекция ротора на ось OX равна:

$$\left(rot\vec{E}\right)_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}.$$

Операция ротор – из той же серии, что и градиент:

$$grad\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k};$$

Градиент конструирует из скалярного поля векторное, а ротор – из векторного снова векторное.

Градиент характеризует быстроту изменения величины (например, потенциала φ) в пространстве. Смысл ротора (ротор – значит «вихрь»): если поле вихревое (непотенциальное), то его ротор отличен от нуля. Ротор показывает вихревой характер поля.

Из сравнения (16.26) и (I), поскольку контур L – произвольный:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \qquad \textbf{(I)}$$

Это – первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме.

8.2. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла

Изменяющееся во времени магнитное поле порождает возникновение вихревого электрического поля $\vec{E}_B$ – это одно из предположений Максвелла. Второе предположение симметрично: **изменяющееся во времени электрическое поле приводит к возникновению магнитного поля**. Это удобно описывать с помощью ***токов смещения***. Рассмотрим протекание переменного тока через конденсатор (рис.16.9).

Внутри конденсатора реально никаких токов нет, а есть изменяющееся во времени электрическое поле – за счёт изменяющегося заряда обкладок конденсатора. Но предположим, что внутри конденсатора течёт ток смещения $I_{\text{см.}}$. Он должен быть равен току проводимости в подводящих проводах; таким образом ток будет непрерывным. Тогда

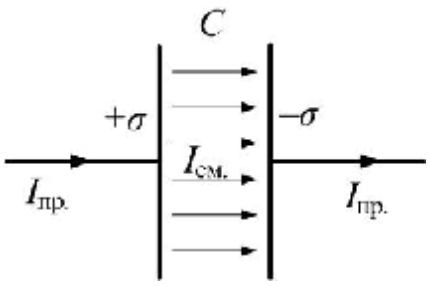


Рис.16.10

$$I_{\text{см.}} = I_{\text{пр.}},$$

$$I_{\text{см.}} = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(\sigma \cdot S) = S \cdot \frac{d\sigma}{dt}.$$

Здесь $\sigma = \frac{q}{S}$ – поверхностная плотность заряда. В лекции 12 было показано, что вектор электрического смещения вблизи проводника равен поверхностной плотности заряда:

$$D = \sigma,$$

тогда

$$I_{\text{см.}} = S \cdot \frac{\partial D}{\partial t}.$$

Здесь производная – частная, поскольку D зависит в общем случае ещё и от координат. Тогда плотность тока смещения равна:

$$\vec{j}_{\text{см.}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (16.28)$$

Особенности тока смещения:

1) Течёт в вакууме, где нет реальных заряженных частиц – переносчиков тока.
2) При протекании тока смещения не выделяется теплота Джоуля-Ленца.
3) Единственное положительное **свойство** (и назначение!) **тока смещения** – **создавать магнитное поле**.

Название «ток смещения» – из определения (16.28) через вектор электрического смещения $\vec{D}$.

Получим некоторые полезные соотношения для плотности тока смещения. Из лекции 12:

$$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E},$$

где $\vec{P}$ – вектор поляризации диэлектрика, тогда

$$\vec{j}_{\text{см.}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \equiv \vec{j}_{\text{поляриз.}} + \vec{j}_{\text{вак.}}.$$

Первое слагаемое $\vec{j}_{\text{поляриз.}}$ возникает в веществе при его поляризации и оправдывает термин «ток смещения»: в переменном электрическом поле происходит смещение поляризационных зарядов. Второе слагаемое $\vec{j}_{\text{вак.}}$ есть и в вакууме, где никаких заряженных частиц нет.

Итак, в общем случае магнитные поля создаются токами проводимости и токами смещения. В законе полного тока (см.предыдущую лекцию)

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}^{\text{макро}} d\vec{S}$$

заменим плотность тока проводимости на суммарную плотность тока проводимости и смещения:

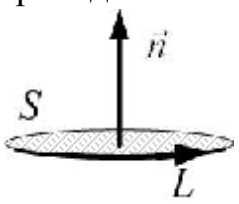


Рис.16.11

$$\vec{j}^{\text{макро}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см.}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

тогда

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \qquad \textbf{(II)}$$

где S – поверхность, натянутая на контур L (рис.16.11).

Уравнение (II) – **второе уравнение Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме**.

Воспользовавшись теоремой Стокса (16.26) для напряжённости магнитного поля:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(rot\vec{H} \right) \cdot d\vec{S},$$

получим второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad \textbf{(II)}$$

Его смысл: **магнитные поля создаются как токами проводимости** (плотность тока проводимости – $\vec{j}$), **так и изменяющимися во времени электрическими полями** – $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

8.3. Теорема Остроградского-Гаусса. Третье и четвёртое уравнения Максвелла

Максвелл обобщил теорему Остроградского-Гаусса (см. лекцию 12) для любых полей, в том числе и нестационарных:

$$\oint_S D \cos\alpha dS = \sum_i q_i^{\text{свободн.}}$$

или:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV, \qquad \textbf{(III)}$$

где $\rho = \dfrac{dq}{dV}$ – объёмная плотность заряда. Интегрирование производится по объёму V, ограниченному замкнутой поверхностью S (рис.16.12).

Смысл теоремы: **поток вектора электрического смещения $\vec{D}$ через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, охваченных этой поверхностью.** Иначе говоря, источником электрического поля являются электрические заряды.

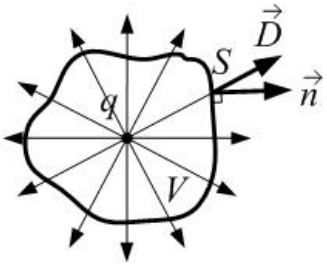


Рис.16.12

По *математической* теореме Гаусса:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \left(div\vec{D}\right) \cdot dV\,, \qquad (16.29)$$

где $div\vec{D}$ – дивергенция векторного поля. Она равна по определению:

$$div\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}. \qquad (16.30)$$

Дивергенция завершает коллекцию операций дифференцирования по координатам векторных и скалярных полей: градиент из скаляра конструирует вектор ($grad\varphi$ – вектор), ротор из вектора снова даёт вектор, а дивергенция вектор превращает в скаляр ($div\vec{D}$ – скаляр). Сравнивая (16.30) и (III), поскольку поверхность S – произвольная, получим третье уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$div\vec{D} = \rho\,. \qquad \textbf{(III)}$$

В лекции 14 сформулирована теорема Остроградского-Гаусса для магнитного поля:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0\,. \qquad \textbf{(IV)}$$

Это – четвёртое уравнение Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме.

Аналогично в дифференциальной форме:

$$div\vec{B} = 0\,. \qquad \textbf{(IV)}$$

Смысл этого уравнения: магнитных зарядов нет.

8.4. Полная система уравнений Максвелла

Полная система уравнений Максвелла включает, кроме приведённых четырёх основных, ещё три так называемых ***материальных уравнения***. Материальные уравнения связывают характеристики полей со свойствами среды и друг с другом и включают, в частности, закон Ома в дифференциальной форме. Вот полная система в интегральной и в дифференциальной формах:

$$\begin{cases} \oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = -\int\limits_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\ \oint\limits_L \vec{H}d\vec{l} = \int\limits_S \left(\vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{S} \\ \oint\limits_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int\limits_V \rho \cdot dV \\ \oint\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \\ \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \\ \vec{j} = \gamma\cdot\vec{E} \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ rot\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ div\vec{D} = \rho \\ div\vec{B} = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \\ \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \\ \vec{j} = \gamma\cdot\vec{E} \end{cases}$$

8.5. Частные случаи: стационарное поле; поле в свободном пространстве

Если поля стационарные, все производные равны нулю:

$$\begin{cases} \oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = 0 \\ \oint\limits_L \vec{H}d\vec{l} = \int\limits_S \vec{j}d\vec{S} = \sum I^{\text{проводимости}} \\ \oint\limits_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int\limits_V \rho\cdot dV = \sum q^{\text{свободных}} \\ \oint\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \\ \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \\ \vec{j} = \gamma\cdot\vec{E} \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\vec{E} = 0 \\ rot\vec{H} = \vec{j} \\ div\vec{D} = \rho \\ div\vec{B} = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \\ \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \\ \vec{j} = \gamma\cdot\vec{E} \end{cases}$$

Поля – магнитное и электрическое – разделяются. Их характеристики не связаны друг с другом.

Второй частный случай – поля в свободном пространстве, где нет ни зарядов, ни токов проводимости:

$$\begin{cases} \oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = -\int\limits_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\ \oint\limits_L \vec{H}d\vec{l} = \int\limits_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \\ \oint\limits_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \\ \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ rot\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ div\vec{D} = 0 \\ div\vec{B} = 0 \\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \\ \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \end{cases}$$

Рассмотрим систему двух первых уравнений Максвелла для свободного пространства:

$$\begin{cases} rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ rot\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = -\int\limits_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\ \oint\limits_L \vec{H}d\vec{l} = \int\limits_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \end{cases}$$

Изменение магнитного поля $\vec{B}$ порождает поле электрическое $\vec{E}$, тоже в общем случае изменяющееся во времени; а изменения поля электрического $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$ порождают снова возникновение магнитного поля $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$. Поля – электрическое и магнитное – распространяются, превращаясь друг в друга. Это – электромагнитная волна, распространяющаяся в свободном пространстве, в отрыве от первоначально породивших её зарядов и токов.

Лекция 8 (17)

Переходные процессы в электрических цепях. Электромагнитные колебания и волны

План

1. Переходные процессы в электрических цепях. Квазистационарные токи
2. R-L-цепочка. Токи при замыкании и размыкании цепи
   2.1.Замыкание
   2.2.Размыкание
3. Электромагнитные колебания в колебательном контуре
   3.1.Свободные гармонические колебания
   3.2.Затухающие колебания
   3.3.Вынужденные колебания. Резонанс
4. Метод векторных диаграмм
   4.1.Активное сопротивление в цепи переменного тока
   4.2.Ёмкость в цепи переменного тока
   4.3.Индуктивность в цепи переменного тока
   4.4.Последовательная цепь переменного тока. Резонанс напряжений
   4.5.Параллельная цепь переменного тока. Резонанс токов
5. Переменный ток
   5.1.Генератор переменного тока
   5.2.Мощность переменного тока
   5.3.Действующие (эффективные) значения тока и напряжения
6. Электромагнитные волны. Шкала электромагнитных волн
7. Энергия электромагнитных волн. Вектор Пойнтинга. Интенсивность волны
8. Давление света
9. Излучение диполя. Диаграмма направленности излучения

1. Переходные процессы в электрических цепях. Квазистационарные токи

Определение: **ток в цепи называется квазистационарным, если время распространения возмущения по цепи $t = \frac{l}{c}$ много меньше периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$ колебаний тока** (или другого характерного времени, за которое ток заметно изменяется):

$$t << T . \qquad (17.1)$$

Здесь l – длина цепи; c – скорость света (скорость распространения возмущения по цепи); ω – круговая частота колебаний переменного тока. В качестве T в (17.1) может выступать, например, характерное время R-C-цепочки (постоянная времени цепочки $T = \tau = RC$; см. лекцию № 13). Тогда:

$$\frac{l}{c} << \frac{1}{\nu}.$$

Пример 1: если длина электрической цепи порядка $l \approx 1\,\text{м}$ (вся установка помещается на столе), то переменный ток можно считать квазистационарным для частот

$$\nu = \frac{1}{T} << \frac{c}{l} = \frac{3\cdot 10^8\ \text{м/с}}{1\,\text{м}} = 3\cdot 10^8\ \text{Гц},$$

то есть примерно $\nu < 10^7$ Гц (в 30 раз меньше – это с гарантией «много меньше»).

Пример 2: для промышленной частоты $\nu = 50\,\text{Гц}$ длина цепи должна быть:

$$l << \frac{c}{\nu} = \frac{3\cdot 10^8\ \text{м/с}}{50\,\text{Гц}} = 6\cdot 10^6\ \text{м} = 6000\ \text{км}.$$

Для сравнения: это в 2 раза дальше, чем от Москвы до Новосибирска, так что для линий электропередач, расположенных в пределах одного города, такой переменный ток – квазистационарный.

Замечательным свойством квазистационарного тока является то, что **мгновенное значение силы тока в линейном проводнике одинаково во всех сечениях проводника в данный момент времени** (это вытекает из условия (17.1)).

Следовательно, **для описания квазистационарных токов можно использовать законы постоянного тока: Ома и Кирхгофа**.

2. R-L-цепочка. Токи при замыкании и размыкании цепи

2.1. Ток при замыкании R-L-цепочки.

Рассмотрим цепь на рис.17.1. При замыкании ключа в положении 1 в цепи потечёт ток.

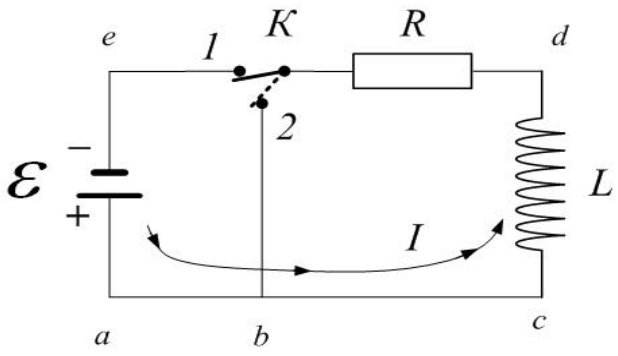


Рис.17.1

Граничные условия:

При $t = 0$ тока ещё нет: $I = 0$;

при $t \to \infty$ сила тока $I \to I_0 \equiv \dfrac{\mathcal{E}}{R}$ – установившийся ток.

По второму правилу Кирхгофа для контура *abcde*:

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}si$$

где IR – падение напряжения на сопротивлении; $\mathcal{E}$ – ЭДС источника тока; $\mathcal{E}si = -L\dfrac{dI}{dt}$ – ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке индуктивности.

$$IR = \mathcal{E} - L\frac{dI}{dt}, \qquad (17.2)$$

Решением дифференциального уравнения (17.2) является функция (17.3):

$$I = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \qquad (17.3)$$

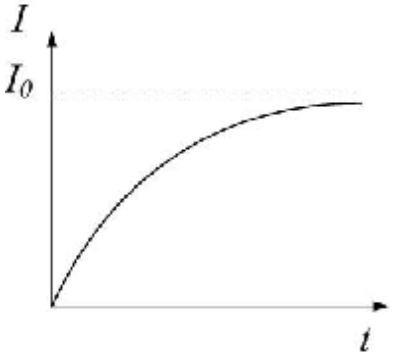


Рис.17.2

где τ – ***постоянная времени R-L-цепочки***, равная

$$\tau = \frac{L}{R}. \qquad (17.4)$$

При $t \to \infty$ сила тока в (17.3) асимптотически приближается к I_0 (рис.17.2).

Докажем, что (17.3) является решением уравнения (17.2), подставив функцию $I(t) = f(t)$

$$I(t) = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \equiv \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R\cdot t}{L}}\right)$$

и её производную в него. Сначала считаем производную:

$$\frac{dI}{dt} = I_0 \cdot \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \equiv I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)' = I_0 \cdot \left(0 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{t}{\tau}\right)'\right)$$

$$\frac{dI}{dt} = I_0 \cdot \left(-e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right)\right) = \frac{I_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \equiv \frac{R \cdot \frac{\mathcal{E}}{R}}{L} \cdot e^{-\frac{R\cdot t}{L}} = \frac{\mathcal{E}}{L} \cdot e^{-\frac{R\cdot t}{L}}$$

Подстановка:

$$\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R\cdot t}{L}}\right) \cdot R = \mathcal{E} - L\frac{\mathcal{E}}{L} \cdot e^{-\frac{R\cdot t}{L}};$$

$$\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{R\cdot t}{L}}\right) = \mathcal{E} - \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{R\cdot t}{L}};$$

$$\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{R\cdot t}{L}}\right) = \mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{R\cdot t}{L}}\right),$$

что и требовалось получить.

2.2. Ток при размыкании R-L-цепочки

После того как ток в цепи установится и станет равным $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$, переключим ключ К в положение 2 (рис.17.1), отсоединив ЭДС $\mathcal{E}$. Для получившегося замкнутого контура *bcdK*2 (рис.17.3) запишем второе правило Кирхгофа (17.5) с граничными условиями (17.6).

$$IR = -L\frac{dI}{dt}; \qquad (17.5)$$

$$\begin{cases} t = 0 & \Rightarrow \quad I = I_0 \equiv \dfrac{\mathcal{E}}{R} \\ t \to \infty & \Rightarrow \quad I \to 0 \end{cases} \tag{17.6}$$

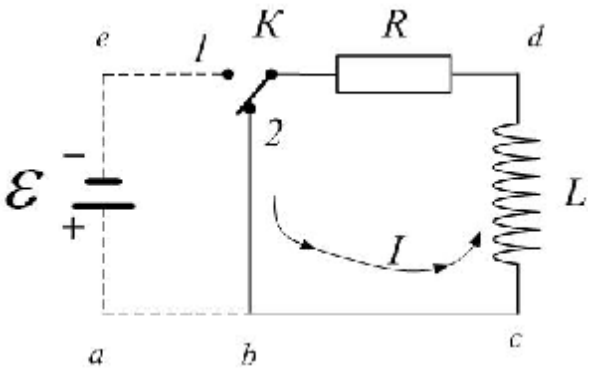


Рис.17.3

Из (17.5):

$$\frac{R}{L}dt = -\frac{dI}{I}$$

Интегрируем:

$$\int_0^t \frac{R}{L}dt = -\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I}$$

$$\frac{R}{L}\cdot\int_0^t dt = -(\ln I)\Big|_{I_0}^{I}$$

$$\frac{R}{L}\cdot t = -(\ln I - \ln I_0)$$

$$-\frac{R}{L}\cdot t = \ln\frac{I}{I_0} \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = e^{\left(\ln\frac{I}{I_0}\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{I_0} = e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$$

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}. \tag{17.7}$$

Это – решение дифференциального уравнения (17.5). С учётом (17.4) можно записать:

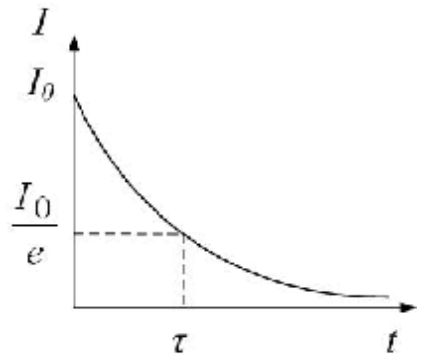


Рис.17.4

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{17.7а}$$

Выясним смысл τ – ***постоянной времени R-L-цепочки*** (или ***времени релаксации***). В момент времени $t = \tau$ сила тока:

$$I(\tau) = I_0 \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau}} = I_0 \cdot e^{-1} = \frac{I_0}{e},$$

то есть **за время релаксации сила тока уменьшается в** $e \approx 2.7$ **раз** (рис.17.4).

3. Электромагнитные колебания в колебательном контуре

Определение: **колебательный контур – это замкнутая цепь, включающая конденсатор** C **и катушку индуктивности** L.

Если в контуре нет сопротивления, а сопротивление проводов ничтожно мало (R=0), то получим идеальный колебательный контур, в котором происходят свободные гармонические колебания.

3.1. Свободные гармонические колебания

Конденсатор C зарядили до заряда q_0 от источника $\mathcal{E}$ и переключили ключ К из положения 1 в положение 2 (рис.17.5). Цепь замкнута; конденсатор начинает

разряжаться через индуктивность L; ток I нарастает. В катушке возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{si}$, которая тормозит возрастающий ток (по правилу Ленца):

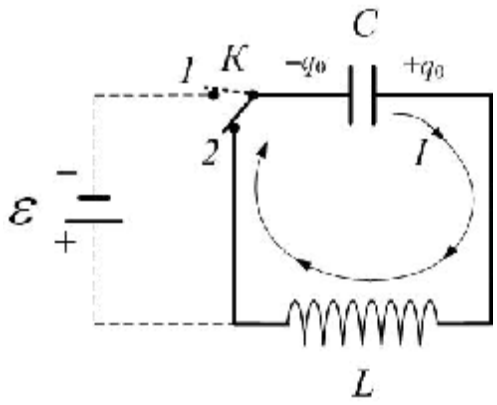


Рис.17.5

$$\mathcal{E}_{si} = -L \cdot \frac{dI}{dt}. \qquad (17.8)$$

Когда конденсатор разрядится, ток начинает убывать; а ЭДС самоиндукции теперь работает в другую сторону, поддерживая убывающий ток: производная в (17.8) отрицательна, а $\mathcal{E}_{si} > 0$. Ток некоторое время продолжает течь в ту же сторону, как бы по инерции. В этом смысле индуктивность L аналогична массе при механических колебаниях: то и другое характеризует инертные свойства колебательной системы. Если сопротивление контура равно нулю (R=0) (идеальный колебательный контур), конденсатор полностью перезарядится до первоначального заряда q_0 (рис.17.6), но полярность поменяется; – прошла половина периода T электромагнитных колебаний в контуре. Далее цикл перезарядки повторится в обратную сторону и ещё через половину периода восстановится первоначальное состояние (рис.17.5).

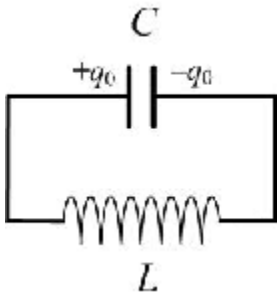


Рис.17.6

Найдём период колебаний. Для этого запишем второе правило Кирхгофа

$$\sum (IR) = \sum \mathcal{E}$$

для контура (рис.17.6) с учётом, что:

- R=0;
- падение напряжения на конденсаторе равно $U_C = \frac{q}{C}$;
- ЭДС в контуре – это ЭДС самоиндукции: $\mathcal{E}_{si} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$.

Тогда

$$U_C = \mathcal{E}_{si},$$
$$\frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt}. \qquad (17.9)$$

Сила тока по определению – производная заряда по времени: $I = \frac{dq}{dt}$; тогда

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2},$$

и из (17.9) получим дифференциальное уравнение колебаний (17.10).

$$\frac{q}{C} = -L\frac{d^2q}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0;$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{L\cdot C}q=0, \tag{17.10}$$

или

$$\ddot{q}+\frac{1}{L\cdot C}q=0. \tag{17.10a}$$

Обозначим

$$\omega_0^2=\frac{1}{L\cdot C}, \tag{17.11}$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L\cdot C}}; \tag{17.11a}$$

тогда получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний в стандартных обозначениях (17.12):

$$\ddot{q}+\omega_0^2\cdot q=0. \tag{17.12}$$

Выражение (17.11а) даёт значение ***собственной частоты*** ω_0 ***незатухающих свободных колебаний контура.*** Соответственно, период колебаний равен:

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0},$$

$$T=2\pi\sqrt{L\cdot C}. \tag{17.13}$$

Это – формула Томсона. Решением уравнения (17.12) является гармоническая функция (17.14).

$$q=q_0\cdot\cos(\omega_0\cdot t+\varphi_0). \tag{17.14}$$

Докажем это, вычислив производные: первую, равную по определению силе тока $I=\dot{q}$, а затем вторую $\ddot{q}$:

$$\dot{q}=\left(q_0\cdot\cos(\omega_0\cdot t+\varphi_0)\right)'=-q_0\cdot\sin(\omega_0\cdot t+\varphi_0)\cdot(\omega_0\cdot t+\varphi_0)'$$

$$\dot{q}=-q_0\cdot\sin(\omega_0\cdot t+\varphi_0)\cdot(\omega_0)$$

$$I=\dot{q}=-\omega_0\cdot q_0\cdot\sin(\omega_0\cdot t+\varphi_0). \tag{17.15}$$

$$\ddot{q}=\left(-\omega_0\cdot q_0\cdot\sin(\omega_0\cdot t+\varphi_0)\right)'=-\omega_0\cdot q_0\cos(\omega_0\cdot t+\varphi_0)(\omega_0\cdot t+\varphi_0)'$$

$$\ddot{q}=-\omega_0^2\cdot q_0\cdot\cos(\omega_0\cdot t+\varphi_0)=-\omega_0^2\cdot q, \tag{17.16}$$

что и требовалось доказать.

Ещё некоторые полезные соотношения:

амплитуда и начальная фаза силы тока из (17.15):

$$I=\dot{q}=-\omega_0\cdot q_0\cdot\sin(\omega_0\cdot t+\varphi_0)=-I_0\cdot\sin(\omega_0\cdot t+\varphi_0)=I_0\cdot\cos\left(\omega_0\cdot t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}I_0=\omega_0\cdot q_0\\ \varphi_0(\textit{для тока})=\varphi_0+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Напряжение на конденсаторе:

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) = U_{C0} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0).$$

Отсюда амплитуда напряжения: $U_{C0} = \frac{q_0}{C}$; напряжение отстаёт по фазе от тока на $\frac{\pi}{2}$.

Поскольку сопротивлением пренебрегали, то колебания незатухающие; энергия заряженного конденсатора целиком преобразуется в энергию магнитного поля катушки индуктивности спустя четверть периода колебаний, а затем обратно в энергию электрического поля заряженного конденсатора. Можно записать закон сохранения энергии (17.17) и из него получить дифференциальное уравнение колебаний, продифференцировав по времени:

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C} = const. \qquad (17.17)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{LI^2}{2}\right) = 0$$

$$\frac{2q}{2C}\frac{dq}{dt} + \frac{L \cdot 2I}{2}\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{q}{LC}\frac{dq}{dt} + I\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{q}{LC}I + I\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{q}{LC} + \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{q}{LC} + \frac{d^2q}{dt} = 0.$$

Для контуров с сопротивлением такой путь решения задачи не годится.

3.2. Затухающие колебания

Идеальных колебательных контуров не бывает; рассмотрим контур с сопротивлением $R \neq 0$ (рис.17.7).

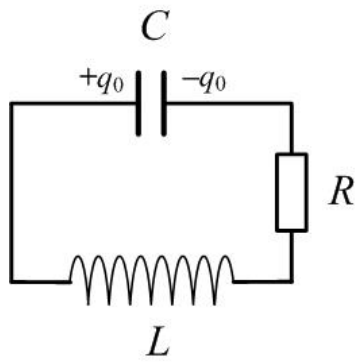


Рис.17.7

Второе правило Кирхгофа даст ***дифференциальное уравнение затухающих колебаний*** (17.18):

$$U_C + IR = \mathcal{E}_{si}$$

$$\frac{q}{C} + IR = -L\frac{dI}{dt}$$

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=0$$

$$\ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=0\,. \qquad (17.18)$$

То же в стандартных обозначениях:

$$\ddot{q}+2\beta\cdot\dot{q}+\omega_0^2 q=0\,, \qquad (17.18а)$$

где β – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота (частота, которая была бы, если бы не было затухания); причём

$$2\beta=\frac{R}{L}. \qquad (17.19)$$

Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний (17.18а) – зависимость заряда на конденсаторе от времени (17.20):

$$q=q_0e^{-\beta\cdot t}\cos(\omega_{\text{зат.}}\cdot t+\varphi_0)\,. \qquad (17.20)$$

Здесь ω – частота затухающих колебаний; она меньше, чем собственная ω_0:

$$\omega_{\text{зат.}}=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,, \qquad (17.21)$$

$$\omega_{\text{зат.}}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,. \qquad (17.21а)$$

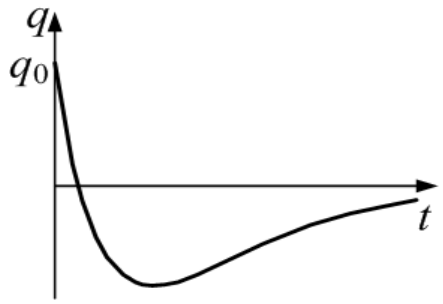


Рис.17.8

Понятно, что решение (17.20) годится только при

$$\beta<\omega_0; \qquad (17.22)$$

иначе под корнем будет отрицательное число. В реальном колебательном контуре при $\beta>\omega_0$ колебаний не возникнет: конденсатор просто разрядится, ток затухнет – это апериодический процесс, подобный изображённому на рис.17.4 или 17.8.

График зависимости (17.20) дан на рис.17.9. Амплитуда колебаний зависит от времени:

$$A(t)=q_0e^{-\beta\cdot t}\,. \qquad (17.23)$$

Уменьшение амплитуды характеризуется **логарифмическим декрементом затухания λ, равным логарифму отношения амплитуд двух следующих друг за другом колебаний** (то есть отличающихся во времени на период):

$$\lambda=\ln\frac{A(t)}{A(t+T)}, \qquad (17.24)$$

$$\lambda=\ln\frac{q_0e^{-\beta\cdot t}}{q_0e^{-\beta\cdot(t+T)}}=\ln\frac{e^{-\beta\cdot t}}{e^{-\beta\cdot t}\cdot e^{-\beta\cdot T}}=\ln\frac{1}{e^{-\beta\cdot T}}=\ln e^{\beta\cdot T}$$

$$\lambda=\beta\cdot T\,. \qquad (17.25)$$

При не слишком большом затухании (при $\beta << \omega_0$)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{\text{зат.}}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{L \cdot C}\,,$$

$$\lambda = \beta \cdot 2\pi\sqrt{L \cdot C} = \frac{R}{2L} \cdot 2\pi\sqrt{L \cdot C} = \pi \cdot R\sqrt{\frac{C}{L}}\,. \qquad (17.26)$$

Добротность Q – ещё одна характеристика колебательного контура. По определению:

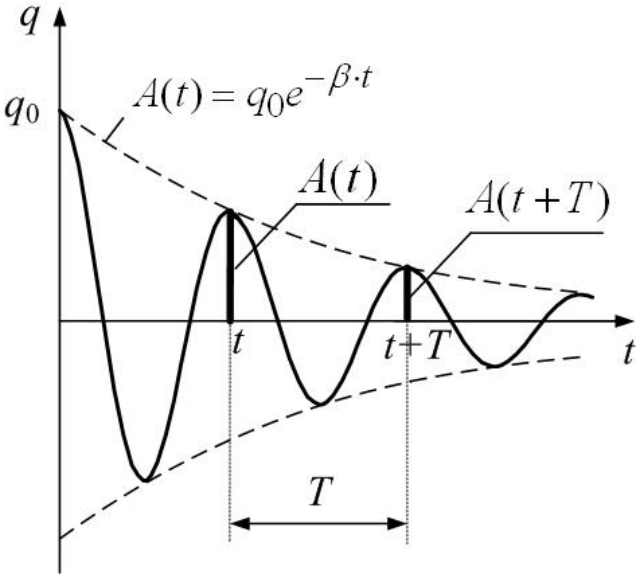


Рис.17.9

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}\,. \qquad (17.27)$$

Если $\beta << \omega_0$, то **добротность обратно пропорциональная относительному уменьшению энергии** W **колебательного контура за один период**:

$$Q = 2\pi\,\frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}\,.$$

Ещё одно соотношение для добротности получим из (17.26):

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} \approx \frac{\pi}{\pi \cdot R\sqrt{\dfrac{C}{L}}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,.$$

3.3. Вынужденные колебания

Если колебательный контур не подпитывать энергией, колебания затухают. Чтобы этого не происходило, подключим к нему источник переменного напряжения частотой ω (рис.17.10):

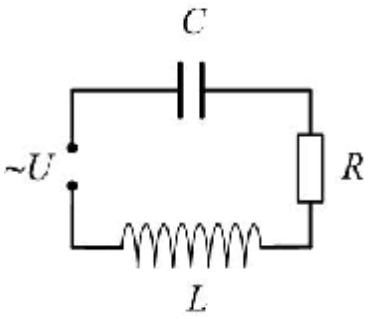


Рис.17.10

$$\mathcal{E} \equiv U = U_0 \cos(\omega \cdot t)\,. \qquad (17.28)$$

Запишем второе правило Кирхгофа для этого замкнутого контура:

$$U_C + IR = \mathcal{E}_{si} + U$$

$$\frac{q}{C} + IR = -L\frac{dI}{dt} + U_0\cos(\omega \cdot t)$$

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = U_0\cos(\omega \cdot t)$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I + \frac{1}{LC}q = \frac{U_0}{L}\cos(\omega \cdot t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{U_0}{L}\cos(\omega \cdot t)$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{U_0}{L}\cos(\omega \cdot t)\,. \qquad (17.29)$$

Это – дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. То же самое в стандартных обозначениях:

$$\ddot{q} + 2\beta \cdot \dot{q} + \omega_0^2 \cdot q = \frac{U_0}{L}\cos(\omega \cdot t). \qquad (17.29а)$$

Его общее решение:

$$q = q_0 \cos(\omega \cdot t - \varphi_0) + q_{0\text{зат.}} e^{-\beta \cdot t} \cos(\omega_{\text{зат.}} \cdot t + \varphi_{0\text{зат.}}).$$

Второе слагаемое можно не рассматривать; оно стремится к нулю при $t \to \infty$:

$$q_{0\text{зат.}} e^{-\beta \cdot t} \cos(\omega_{\text{зат.}} \cdot t + \varphi) \to 0;$$

так что вынужденные колебания – гармонические с частотой, равной частоте источника переменного напряжения ω:

$$q = q_0 \cos(\omega \cdot t - \varphi_0). \qquad (17.30)$$

Здесь для начальной фазы φ_0

$$tg\varphi_0 = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\frac{R}{L}\omega}{\frac{1}{LC} - \omega^2} = \frac{R}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)\frac{L}{\omega}};$$

$$tg\varphi_0 = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \qquad (17.31)$$

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты ω:

$$q_0 \equiv q_0(\omega) = \frac{\frac{U_0}{L}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \qquad (17.32)$$

График этой зависимости представлен на рис.17.11 для различных значений добротности контура: $Q_1 > Q_2 > Q_3$.

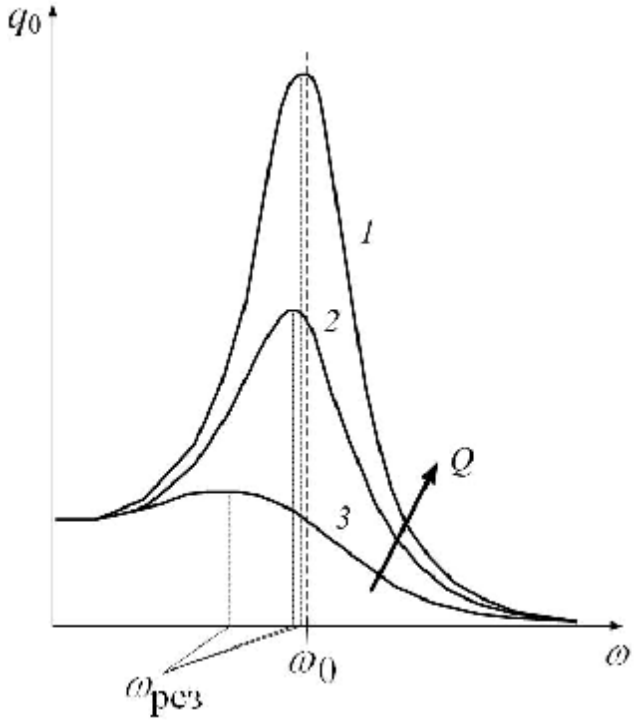


Рис.17.11

Найдём резонансную частоту, то есть такую частоту, при которой амплитуда q_0 имеет максимальное значение. **Резонанс – резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты внешнего воздействия (в данном случае – частоты источника переменного напряжения) к резонансной частоте**. Максимальное значение q_0 достигается при минимальном значении подкоренного выражения в (17.32); поэтому вместо уравнения $\frac{dq_0}{d\omega} = 0$ достаточно решить уравнение:

$$\frac{d}{d\omega}\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2\right)=0$$

$$\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2\right)'=0$$

$$2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)(-2\omega)+4\beta^2 2\omega=0$$

$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)(-\omega)+2\beta^2\omega=0$$

Один из корней этого уравнения $\omega=0$ соответствует минимуму q_0.

После сокращения на ω:

$$-\left(\omega_0^2-\omega^2\right)=-2\beta^2$$

$$\omega^2=\omega_0^2-2\beta^2$$

Таким образом, резонансная частота **для заряда и напряжения на конденсаторе** (поскольку $U_{C0}=\frac{q_0}{C}$):

$$\omega_{\text{рез.}}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}\,. \qquad (17.33)$$

Как видно, $\omega_{\text{рез.}}<\omega_0$. При малом затухании, то есть при $\beta<<\omega_0$ резонансная частота совпадает с частотой собственных колебаний контура:

$$\omega_{\text{ðåç.}}\approx\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Получим зависимость силы тока от частоты, продифференцировав заряд (17.30) по времени:

$$I=\dot{q}=q_0\left(\cos(\omega\cdot t-\varphi_0)\right)'=q_0\cdot\left(-\omega\sin(\omega\cdot t-\varphi_0)\right)=\omega\cdot q_0\cos\left(\omega\cdot t-\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$I=\omega\cdot q_0\cos\left(\omega\cdot t-\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)\equiv I_0\cos\left(\omega\cdot t-\varphi\right). \qquad (17.34)$$

Здесь I_0 – амплитудное значение силы тока; $(-\varphi)$ – начальная фаза для тока. Сравнив (17.28) и (17.34), получим, что ток отстаёт по фазе от напряжения на φ; причём

$$\begin{cases}\left(-\varphi\right)=-\varphi_0+\dfrac{\pi}{2}\\ I_0=\omega\cdot q_0\end{cases}$$

Отсюда

$$\varphi=\varphi_0-\frac{\pi}{2};$$

$$tg\varphi=tg\left(\varphi_0-\frac{\pi}{2}\right)=-ctg\varphi_0$$

Из (17.31):

$$tg\varphi = -ctg\varphi_0 = -\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \qquad (17.35)$$

Для амплитуды тока с учётом (17.32):

$$I_0 = \omega \cdot q_0 = \frac{\omega \cdot \frac{U_0}{L}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\frac{L}{\omega}\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{L}{\omega}\omega_0^2 - \frac{L}{\omega}\omega^2\right)^2 + \left(\frac{L}{\omega}\right)^2 4\beta^2\omega^2}}$$

После замены

$$2\beta = \frac{R}{L}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

получим:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{L}{\omega}\frac{1}{L \cdot C} - \frac{L}{\omega}\omega^2\right)^2 + \left(\frac{L}{\omega}\right)^2\left(\frac{R}{L}\right)^2\omega^2}}$$

Сокращаем:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega \cdot C} - \omega L\right)^2 + R^2}}. \qquad (17.36)$$

Очевидно, сила тока максимальна при минимальном подкоренном выражении в (17.36), а оно минимально и равно R, если

$$\omega L = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

То есть

$$\left(\omega_{\text{рез.}}\right)_I = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (17.37)$$

Это – ***резонансная частота для тока***. Она ***точно*** (не приблизительно!) равна собственной частоте ω_0 колебательного контура.

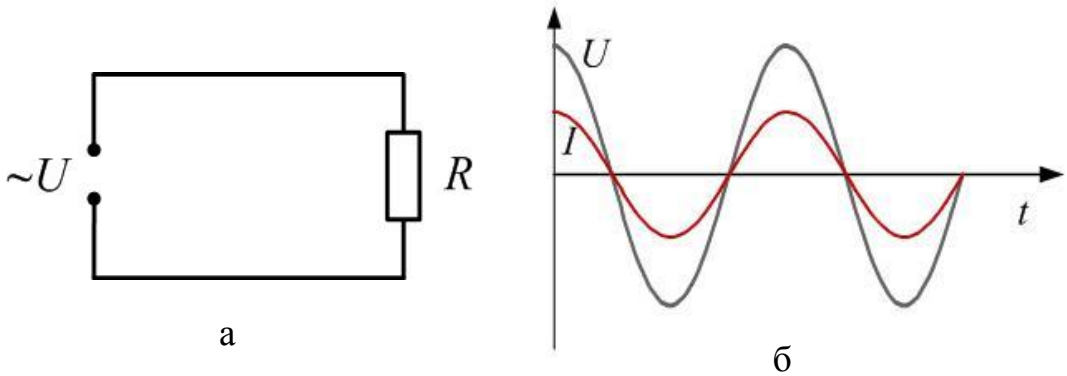
4. Метод векторных диаграмм

Решение (17.30) дифференциального уравнения вынужденных колебаний приводились без доказательства. Метод векторных диаграмм позволяет его обосновать и решать множество аналогичных задач для более сложных цепей переменного тока, а не только для последовательных. Идея метода была изложена в лекции № 4 «Колебания и волны» и состоит в том, что гармоническому колебанию сопоставляют вектор, модуль которого равен амплитуде, а начальная фаза соответствует углу между вектором и осью OX. Колебания складываются как векторы в плоскости XOY.

4.1. Активное сопротивление в цепи переменного тока

На активное сопротивление подадим переменное напряжение (рис.17.12, а):

$$U_R = U_{R0} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$



а б

Рис.17.12

Мгновенные значения силы тока и напряжения связаны законом Ома:

$$I = \frac{U_R}{R}$$

$$I = \frac{U_{R0}}{R}\cos(\omega \cdot t)$$

$$I = I_0 \cos(\omega \cdot t)$$

Тогда для амплитудных значений тока и напряжения закон Ома:

$$I_0 = \frac{U_{R0}}{R},$$

$$U_R = R \cdot I = R \cdot I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = U_{R0} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Выводы:

1) Амплитуда напряжения $U_{R0} = R \cdot I_0$.

2) Напряжение и ток совпадают по фазе (рис.17.12, б), то есть сдвиг фаз между ними $\varphi = 0$.

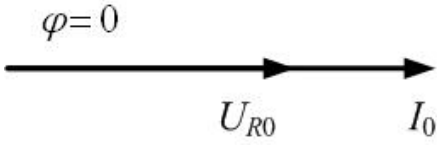


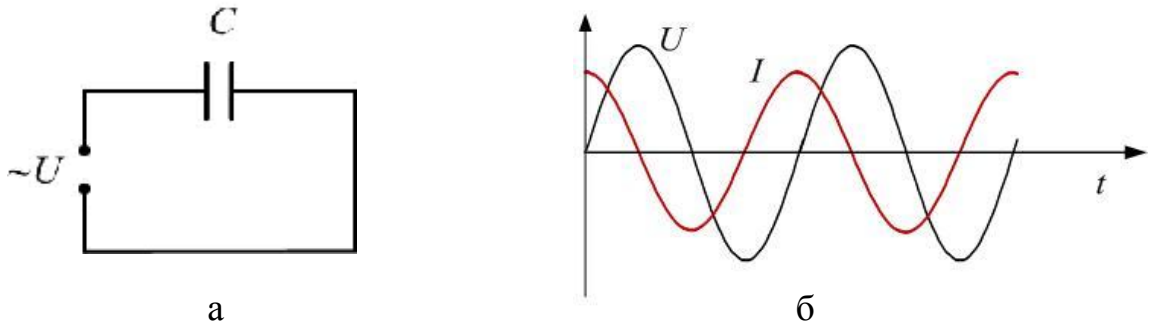
Рис.17.13

3) Векторная диаграмма для тока и напряжения на активном сопротивлении – рис. 17.13.

4.2. Ёмкость в цепи переменного тока

Подключим ёмкость к источнику переменного напряжения (рис.17.14,а). Ток в цепи будет переменным, частота совпадает с частотой ЭДС источника:

$$I = I_0 \cos(\omega \cdot t). \qquad (17.38)$$



а б

Рис.17.14

По определению, $I = \frac{dq}{dt}$, тогда

$$q = q_0 \sin(\omega \cdot t),$$

$$I = \frac{dq}{dt} = (q_0 \sin(\omega \cdot t))' = q_0 \omega \cdot \cos(\omega \cdot t). \qquad (17.39)$$

Сравниваем (17.38) и (17.39):

$$I_0 = q_0 \omega \ . \qquad (17.40)$$

Напряжение на конденсаторе:

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \sin(\omega \cdot t) = \frac{q_0}{C} \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U_c = U_{C0} \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (17.41)$$

Выводы:

1) Амплитуда напряжения

$$U_{C0} = \frac{q_0}{C} = \frac{I_0}{\omega C} = I_0 \cdot \frac{1}{\omega C} = I_0 \cdot R,$$

где R_C – ёмкостное сопротивление:

$$R_C = \frac{1}{\omega C}. \qquad (17.42)$$

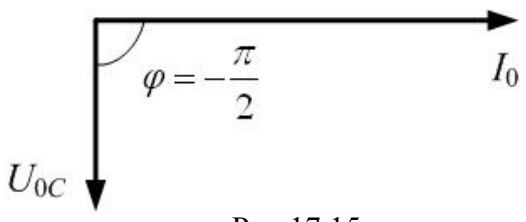


Рис.17.15

2) Из (17.41) напряжение отстаёт по фазе от тока на $\frac{\pi}{2}$ (рис.17.14, б):

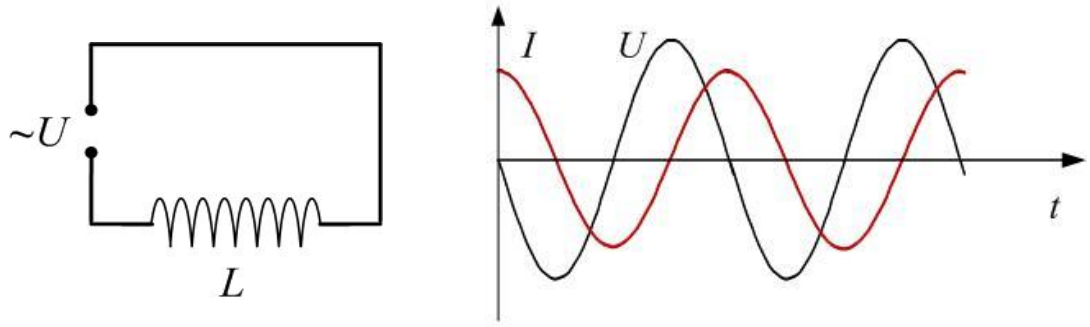
$$\varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

3) Векторная диаграмма для тока и напряжения на ёмкостном сопротивлении дана на рис. 17.15.

4.3. Индуктивность в цепи переменного тока

На катушку индуктивности подаём переменный ток (рис.17.16, а):

$$I = I_0 \cos(\omega \cdot t).$$



а б

Рис.17.16

В ней возникает ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt} = L \cdot I_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Второе правило Кирхгофа (сопротивление отсутствует):

$$\mathcal{E}_{si} + U_L = 0$$

Отсюда напряжение на катушке:

$$U_L = -\mathcal{E}_{si} = -L\omega \cdot I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$U_L = U_{L0} \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Выводы:

1) Амплитуда напряжения

$$U_{L0} = L\omega \cdot I_0;$$

$$U_{L0} = R_L \cdot I_0,$$

где R_L – индуктивное сопротивление:

$$R_L = L\omega. \qquad (17.43)$$

2) Напряжение опережает ток по фазе на $\frac{\pi}{2}$ (рис.17.16, б):

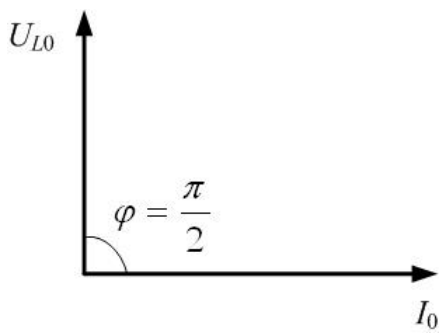


Рис.17.17

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

В катушке ток отстаёт от напряжения вследствие тормозящего действия ЭДС самоиндукции, которая препятствует изменениям тока по правилу Ленца.

3) Векторная диаграмма для тока и напряжения на индуктивном сопротивлении – рис. 17.17.

4.4. Последовательная цепь переменного тока. Резонанс напряжений

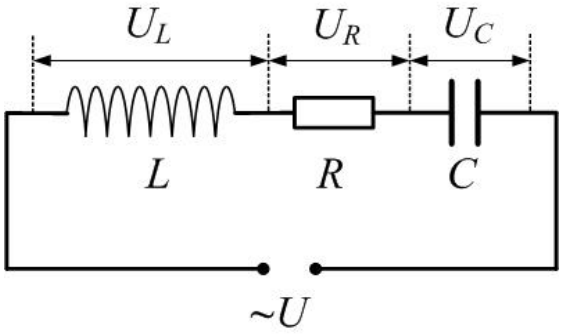


Рис.17.18

Соединим все три элемента последовательно в цепь (рис.17.18) и подадим переменную ЭДС:

$$U = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi).$$

Ток в каждом элементе одинаков, а векторная сумма напряжений на всех элементах (в соответствии с методом векторных диаграмм) даст ЭДС источника:

$$\vec{U} = \vec{U}_{L0} + \vec{U}_{R0} + \vec{U}_{C0},$$

где для каждого элемента можно написать:

$$\begin{cases} U_L = U_{L0} \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ U_R = U_{R0} \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ U_c = U_{C0} \cos\left(\omega \cdot t - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} U_{L0} = L\omega \cdot I_0 = R_L \cdot I_0 \\ U_{R0} = R \cdot I_0 \\ U_{C0} = \dfrac{1}{\omega C} \cdot I_0 = R_C \cdot I_0 \end{cases}$$

Рисуем векторную диаграмму с учётом сдвига фаз на каждом элементе цепи (рис.17.19). Из картинки получаем для суммарного напряжения:

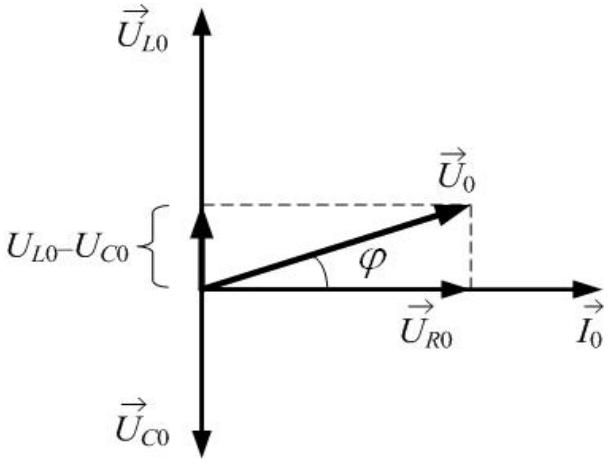


Рис.17.19

$$U_0^2 = (U_{L0} - U_{C0})^2 + U_{R0}^2$$

$$U_0^2 = (R_L \cdot I_0 - R_C \cdot I_0)^2 + (R \cdot I_0)^2$$

$$U_0^2 = I_0^2\left((R_L - R_C)^2 + R^2\right)$$

$$U_0 = I_0\sqrt{(R_L - R_C)^2 + R^2}$$

$$U_0 = I_0\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}.$$

Получен закон Ома для переменного тока:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}};$$

$$I_0 = \frac{U_0}{Z},$$

где $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ – ***полное сопротивление последовательной цепи переменного тока***. Таким образом, (17.36) доказано.

Из рис.17.19 получим и угол сдвига фаз между током и напряжением:

$$tg\varphi = \frac{U_{L0} - U_{C0}}{U_{R0}} = \frac{R_L I_0 - R_C I_0}{R I_0} = \frac{R_L - R_C}{R} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

При резонансе:

$$\omega L = \frac{1}{\omega \cdot C}$$
$$R_L = R_C$$
$$U_{L0} = U_{C0}$$

Напряжения на индуктивном и на ёмкостном сопротивлениях колеблются в противофазе и равны по модулю (поэтому резонанс в последовательной цепи назван ***резонансом напряжений***), следовательно, полностью компенсируют друг друга:

$$\vec{U}_{L0} + \vec{U}_{C0} = 0$$
$$\vec{U}_0 = \vec{U}_{R0}$$

Полное сопротивление цепи при резонансе минимально и равно её активному сопротивлению:

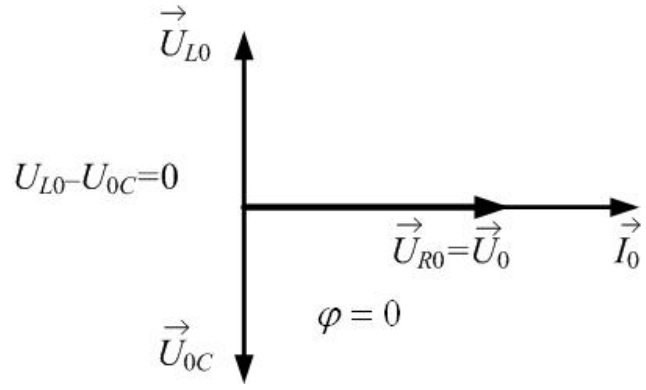


Рис.17.20

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = R;$$

ток максимален и равен

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{R}.$$

Сдвига фаз между током и напряжением нет:

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} = 0$$

Векторная диаграмма при резонансе напряжений (рис.17.20):

4.5. Параллельная цепь переменного тока. Резонанс токов

Для простоты рассмотрим параллельную цепь без активного сопротивления: R=0 (рис.17.21). Токи будем считать квазистационарными. По первому правилу Кирхгофа алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю. Токи складываем как векторы, длины которых равны соответствующим амплитудам:

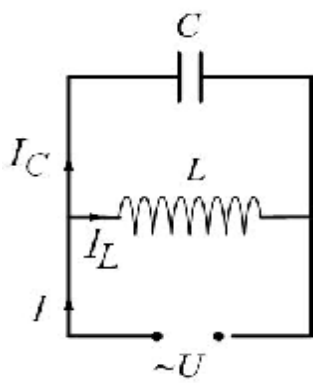


Рис.17.21

$$\vec{I}_0 = \vec{I}_{L0} + \vec{I}_{C0}$$

Напряжения на ёмкости и индуктивности равны друг другу (цепь параллельная), и

$$\vec{U}_0 = \vec{U}_{L0} = \vec{U}_{C0}$$

При резонансе

$$\omega L = \frac{1}{\omega \cdot C};$$

$$R_L = R_C.$$

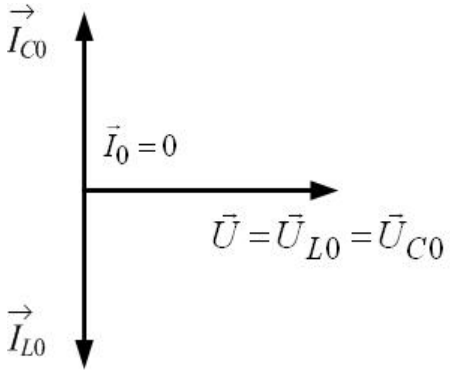


Рис.17.22

Тогда токи в обеих ветвях одинаковы по величине:

$$I_{L0} = \frac{U_{L0}}{R_L} = \frac{U_0}{R_L}; \qquad I_{C0} = \frac{U_{C0}}{R_C} = \frac{U_0}{R_C}$$

$$I_{L0} = I_{C0},$$

но колеблются в противофазе (рис.17.22). Они при сложении компенсируют друг друга, и общий ток равен нулю:

$$\vec{I}_0 = \vec{I}_{L0} + \vec{I}_{C0} = 0.$$

Это – ***резонанс токов***.

5.1. Генератор переменного тока

Принцип действия генератора переменного тока основан на явлении электромагнитной индукции. Рассмотрим рамку, вращающуюся с угловой скоростью ω в постоянном магнитном поле (рис.17.23). Угол между нормалью к рамке и индукцией поля изменяется по закону:

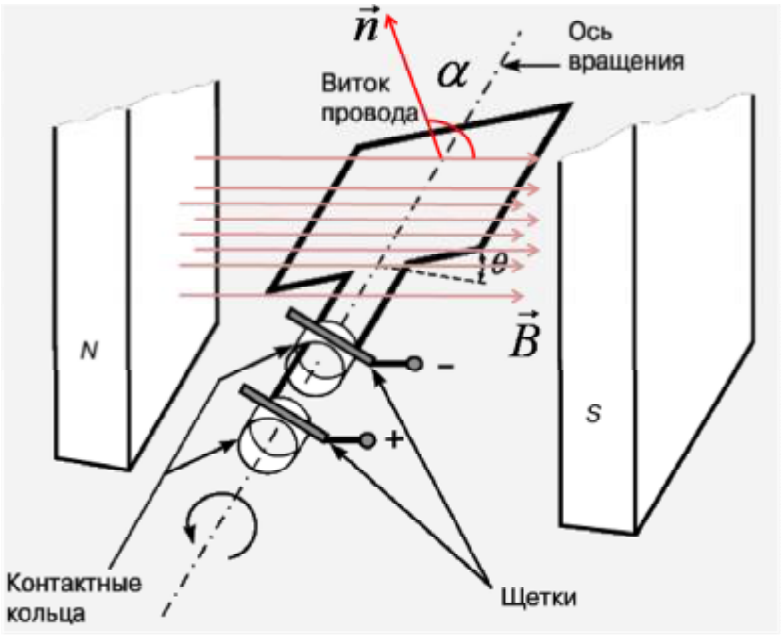


Рис.17.23

$$\alpha = \omega \cdot t;$$

магнитный поток через рамку тоже изменяется:

$$\Phi = BS\cos\alpha = BS\cos(\omega \cdot t).$$

По закону Фарадея ЭДС индукции, возникающая в рамке, равна

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt};$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BS\cos(\omega \cdot t)) = BS\omega\sin(\omega \cdot t) \equiv \varepsilon_0\sin(\omega \cdot t);$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0\sin(\omega \cdot t).$$

Здесь ε_0 – амплитудное (максимальное) значение ЭДС, равное

$$\varepsilon_0 = BS\omega$$

Для увеличения напряжения берут рамку с N витками; тогда полное потокосцепление

$$\Psi = N\Phi;$$

а ЭДС индукции

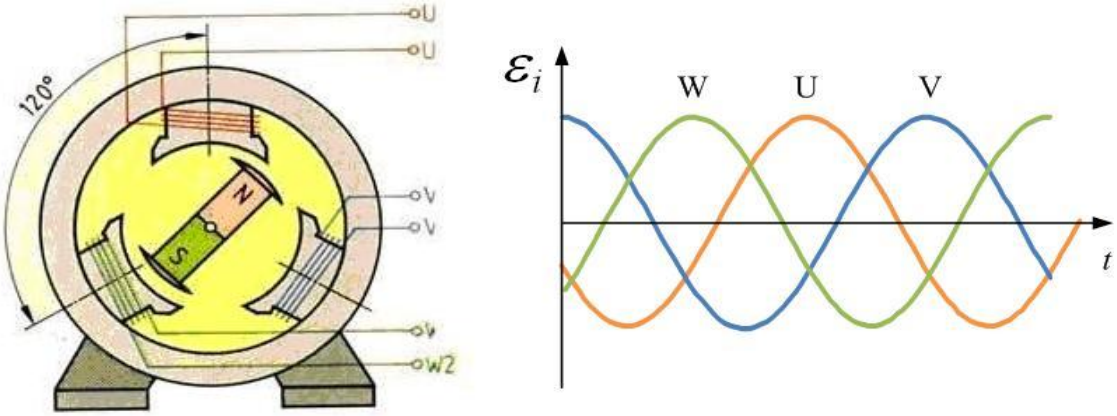
$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt},$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d}{dt}(N\Phi) = -\frac{d}{dt}(NBS\cos(\omega\cdot t)) = NBS\omega\sin(\omega\cdot t) \equiv \varepsilon_0\sin(\omega\cdot t).$$

Соответственно, амплитудное значение ЭДС увеличивается в N раз:

$$\varepsilon_0 = NBS\omega. \qquad (17.44)$$

Поскольку в таких генераторах рамка вращается, то снимать с неё ток приходится при помощи скользящих контактов – щёток. Это неудобно; к тому же скользящий контакт в цепи большой мощности создаёт значительные потери энергии. Так что в больших промышленных генераторах вращается электромагнит, в то время как обмотки, в которых наводится ЭДС, остаются неподвижными. Если использовать, например, три симметрично расположенных обмотки (рис.17.24а), то в каждой из них фаза ЭДС индукции будет сдвинута на 120^0 (рис.17.24,б); это уже трёхфазный ток.



а б

Рис.17.24

5.2. Мощность переменного тока

Сдвиг фаз между током и напряжением в общем случае равен φ. Мгновенные значения тока и напряжения:

$$U = U_0\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi),$$
$$I = I_0\cdot\cos(\omega\cdot t).$$

Мгновенная мощность:

$$P_м = U\cdot I,$$
$$P_м = U_0\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi)\cdot I_0\cdot\cos(\omega\cdot t).$$

Вспомним тригонометрию:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)),$$

тогда

$$\cos(\omega\cdot t+\varphi)\cdot\cos(\omega\cdot t) = \frac{1}{2}(\cos(2\omega\cdot t+\varphi)+\cos\varphi).$$

$$P_м = U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2}\left(\cos(2\omega \cdot t + \varphi) + \cos\varphi\right). \qquad (17.45)$$

Как видно из (17.45), мгновенная мощность изменяется во времени с частотой 2ω – в два раза больше частоты тока. Мощность изменяется быстро, и её мгновенные значения неважны; важно знать среднюю мощность:

$$P \equiv \langle P_м \rangle = U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2}\left\langle\left(\cos(2\omega \cdot t + \varphi) + \cos\varphi\right)\right\rangle.$$

Среднее значение косинуса за период равно нулю (он знакопеременный). За достаточно большой промежуток времени, сравнительно с периодом колебаний, также можно считать, что

$$\langle\cos(2\omega \cdot t + \varphi)\rangle = 0.$$

Тогда средняя мощность равна:

$$P = U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2}\cos\varphi. \qquad (17.46)$$

Введём определения:

Эффективные (действующие) ток и напряжение равны соответственно:

$$U_э = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \qquad (17.47)$$

$$I_э = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad (17.48)$$

Отсюда средняя мощность

$$P = U_э \cdot I_э \cdot \cos\varphi\ . \qquad (17.49)$$

При отсутствии сдвига фаз $\varphi = 0$, $Z = R$, и

$$P = U_э \cdot I_э = I_э^2 R = \frac{U_э^2}{R}, \qquad (17.49а)$$

то есть среднюю мощность можно рассчитать по формулам, похожим на аналогичные для постоянного тока. Таким образом, (17.48) и (17.49а) дают возможность сформулировать смысл понятия «эффективный ток»: **эффективное значение переменного тока численно равно такому постоянному току, который даёт ту же мощность, что и данный переменный ток.**

6. Электромагнитные волны. Шкала электромагнитных волн

Как указывалось в предыдущей лекции, из уравнений Максвелла для электромагнитного поля при отсутствии токов проводимости и заряженных тел

$$\begin{cases} rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ rot\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \qquad (17.50)$$

вытекает, что поля – электрическое и магнитное – могут распространяться, оторвавшись от породивших их источников, превращаясь друг в друга, то есть из уравнений Максвелла вытекает существование электромагнитных волн.

Приведём без доказательства волновые уравнения, получающиеся из (17.50):

$$\begin{cases} \Delta\vec{E} = \mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \\ \Delta\vec{H} = \mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \end{cases} \qquad (17.51)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, равный $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Например, $\Delta\vec{E} = \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$.

Уравнения (17.51) – это дифференциальные уравнения волны (см. лекцию №4). Из них можно определить скорость υ распространения волны. Обозначим

$$\frac{1}{\upsilon^2} = \mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon; \qquad (17.52)$$

$$n = \sqrt{\mu\varepsilon}; \qquad (17.53)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{Гн}{м}\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\,\frac{Ф}{м}}} \approx 3\cdot 10^8\,\frac{м}{с}. \qquad (17.54)$$

Тогда

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}; \qquad (17.55)$$

Уравнение волны примет вид:

$$\begin{cases} \Delta\vec{E} = \dfrac{1}{\upsilon^2}\cdot\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \\ \Delta\vec{H} = \dfrac{1}{\upsilon^2}\cdot\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \end{cases} \qquad (17.51а)$$

Здесь c – скорость волны в вакууме (скорость света в вакууме);

n – показатель преломления среды, показывающий, во сколько раз скорость волны в среде меньше, чем в вакууме:

$$n = \frac{c}{\upsilon}. \qquad (17.55а)$$

Из уравнений Максвелла вытекает также, что в бегущей электромагнитной волне векторы скорости $\vec{\upsilon}$, напряжённости электрического поля $\vec{E}$ и напряжённости магнитного поля $\vec{H}$:

1) перпендикулярны друг другу: $\vec{E}\perp\vec{H}$; $\vec{\upsilon}\perp\vec{E}$; $\vec{\upsilon}\perp\vec{H}$;

2) образуют ***правую тройку*** $(\vec{E},\vec{H},\vec{\upsilon})$: если вектор $\vec{E}$ поворачивать, совмещая с вектором $\vec{H}$, то поступательное движение ***правого винта*** (буравчика) даёт направление вектора (рис.17.25);

3) $\vec{E}$ и $\vec{H}$ колеблются перпендикулярно друг другу в одной фазе;

4) мгновенные значения напряжённостей полей связаны друг с другом соотношением:

$$E \cdot \sqrt{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} = H \cdot \sqrt{\mu \cdot \mu_0}\,. \qquad (17.56)$$

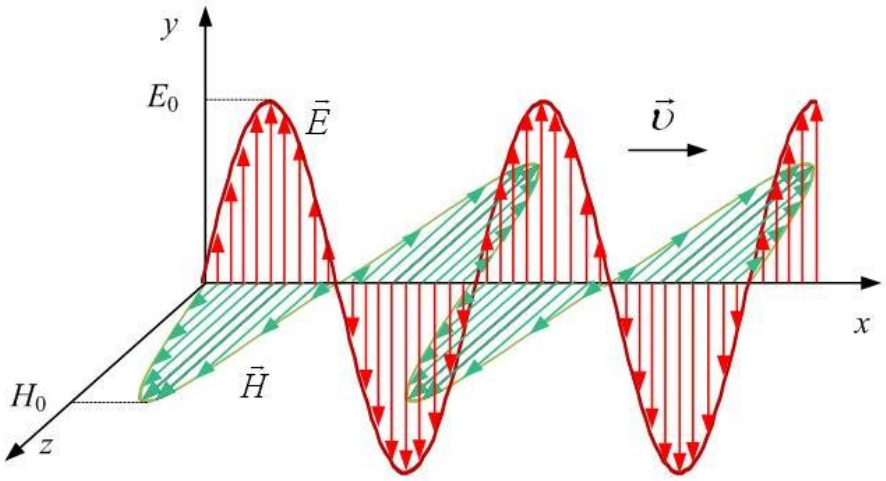


Рис.17.25

Направим ось OX вдоль вектора $\vec{\upsilon}$, а OY – вдоль $\vec{E}$ (то есть $E = E_y$); тогда вектор $\vec{H}$ будет направлен вдоль оси OZ, $H = H_z$. В плоской волне, бегущей вдоль OX, значения E и H зависят только от координаты x и времени t:

$$\begin{cases} E_y = E_0 \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) \\ H_z = H_0 \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) \end{cases} \qquad (17.57)$$

Это – одно из возможных решений дифференциальных уравнений (17.51).

Здесь k – волновой вектор (волновое число):

$k = \dfrac{\omega}{\upsilon} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$;

$\lambda = \upsilon \cdot T = \dfrac{\upsilon}{\nu}$ – длина волны,

причём для амплитудных значений из (17.56):

$$E_0 \cdot \sqrt{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} = H_0 \cdot \sqrt{\mu \cdot \mu_0}\,. \qquad (17.56а)$$

На рис.17.26 изображена шкала электромагнитных волн от $\lambda \approx 10^8\,м$ до $\lambda \approx 10^{-12}\,м$. Свойства волн различной длины существенно различаются. Укажем более-менее условно границы диапазонов:

$\lambda > 10^{-4}\,м$ – радио

$10^{-4}\,м \div 8 \cdot 10^{-7}\,м$ – ИК

$8 \cdot 10^{-7}\,м \div 4 \cdot 10^{-7}\,м$ – видимые } световые волны

$4 \cdot 10^{-7}\,м \div 10^{-9}\,м$ – УФ

$10^{-9}\,м \div 6 \cdot 10^{-12}\,м$ – R-лучи

$\lambda < 6 \cdot 10^{-12}\,м$ – γ-лучи.

Видимое человеческим глазом излучение занимает ничтожно малый диапазон от 380 нм до 780 нм.

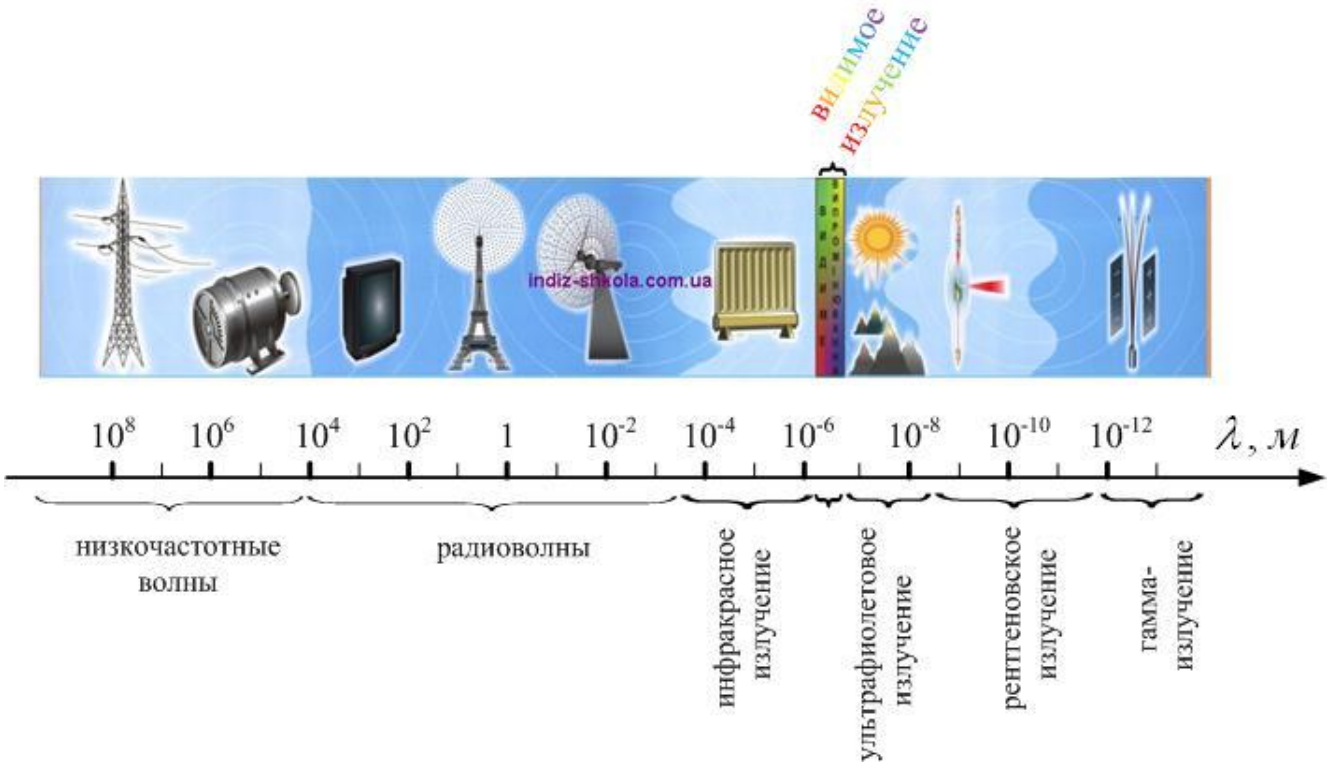


Рис.17.26

7. Энергия электромагнитных волн. Вектор Пойнтинга. Интенсивность волны

Объёмная плотность энергии электромагнитной волны складывается из энергии магнитного поля и электрического поля:

$$w = w_м + w_э,$$

$$w_м = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2},$$

$$w_э = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}.$$

Из (17.56): $E \cdot \sqrt{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} = H \cdot \sqrt{\mu \cdot \mu_0}$, тогда $w_м = w_э$,

$$w = w_м + w_э = 2w_м = 2w_э = 2\sqrt{w_м w_э} = 2\sqrt{\frac{\mu_0 \mu H^2}{2}\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}} = \sqrt{\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon} \cdot EH.$$

Поскольку $\frac{1}{\upsilon^2} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon$ (17.52), то

$$w = \frac{EH}{\upsilon}. \qquad (17.58)$$

Введём вектор $\vec{\Pi}$ плотности потока энергии (вектор Пойнтинга). **Вектор Пойнтинга численно равен энергии, переносимой за единицу времени через**

единичную площадку, перпендикулярную лучу, и направлен в сторону переноса энергии волной:

$$\left|\vec{\Pi}\right| = \frac{dW}{\Delta S \cdot dt}.$$

За время dt через площадку ΔS будет перенесена энергия, содержащаяся в объёме пространства $dV = \Delta S \cdot \upsilon \cdot dt$ (рис.17.27):

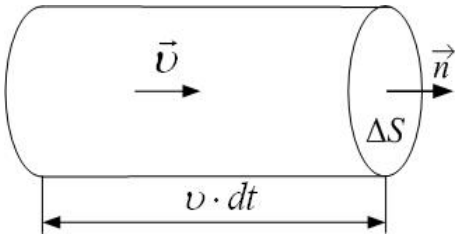


Рис.17.27

$$dW = w \cdot dV = w \cdot \Delta S \cdot \upsilon \cdot dt,$$

тогда

$$\left|\vec{\Pi}\right| = \frac{dW}{\Delta S \cdot dt} = \frac{w \cdot \Delta S \cdot \upsilon \cdot dt}{\Delta S \cdot dt} = w \cdot \upsilon.$$

Для вектора $\vec{\Pi}$:

$$\vec{\Pi} = w \cdot \vec{\upsilon} \qquad (17.59)$$

В бегущей волне $\vec{E} \perp \vec{H}$ и $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{\upsilon})$ – правая тройка, поэтому векторное произведение $\left[\vec{E} \times \vec{H}\right]$ направлено так же, как и скорость $\vec{\upsilon}$ волны; тогда вектор Пойнтинга можно записать:

$$\vec{\Pi} = \left[\vec{E} \times \vec{H}\right] \qquad (17.60)$$

Интенсивность волны – это среднее значение модуля вектора плотности потока энергии.

Из (17.57):

$$I = \left\langle \left|\vec{\Pi}\right| \right\rangle = \left\langle \left|\left[\vec{E} \times \vec{H}\right]\right| \right\rangle = E_0 \cdot H_0 \left\langle \cos^2(\omega \cdot t - k \cdot x) \right\rangle = \frac{E_0 \cdot H_0}{2}$$

Из (17.56а) $E_0 \cdot \sqrt{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} = H_0 \cdot \sqrt{\mu \cdot \mu_0}$ получим:

$$I = \frac{E_0 \cdot H_0}{2} = \frac{E_0}{2} \cdot E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}{\mu \cdot \mu_0}} = \frac{E_0^2}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon},$$

так как для всех прозрачных для электромагнитного излучения сред $\mu = 1$ (это диамагнетики или парамагнетики).

Для показателя преломления по той же причине:

$$n = \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon}.$$

Вывод: интенсивность волны прямо пропорциональна квадрату её амплитуды и показателю преломления среды:

$$I = \frac{E_0^2}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot n \sim E_0^2 \cdot n.$$

8. Давление света

Получить формулу для давления света, падающего на поверхность, можно разными способами. Ну, например, из таких соображений: свет – электромагнитная волна, поэтому при попадании света на вещество в нём появляются токи под действием электрической составляющей электромагнитной волны; а магнитное поле действует на эти токи силой Ампера – это и есть сила

давления. Ещё один подход – чисто квантовый: фотоны падают на поверхность и передают ей свой импульс. Таким путём мы пойдём в следующем семестре в теме «квантовая физика».

Пока всё же постараемся остаться в рамках волновой интерпретации света, хотя одну формулу теории относительности для связи энергии W и импульса p придётся применить:

$$W = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

здесь m=0 – масса волны (масса фотона).

Короче, если свет обладает энергией, то и импульсом тоже, причём

$$W = \sqrt{p^2c^2 + 0} = pc,$$

$$p = \frac{W}{c}. \qquad (17.61)$$

Дальше – по второму закону Ньютона: изменение импульса тела равно импульсу действовавшей силы:

$$dp = F \cdot dt.$$

Пусть поверхность абсолютно чёрная и поглощает всё падающее на неё излучение (коэффициент отражения $\rho = 0$), тогда изменение импульса стенки при нормальном падении света равно самому импульсу волны, или (с коэффициентом $\frac{1}{c}$ – см. (17.61)) энергии волны, перенесённой волной за время dt через площадку ΔS (рис.17.27):

$$dp = \frac{dW}{c} = F \cdot dt.$$

Отсюда сила давления

$$F = \frac{dW}{c \cdot dt}.$$

Будем считать, что свет падает на поверхность из вакуума, скорость волны $\upsilon = c$. Тогда

$$dW = w \cdot dV = w \cdot \Delta S \cdot c \cdot dt,$$

$$F = \frac{dW}{c \cdot dt} = \frac{w \cdot \Delta S \cdot c \cdot dt}{c \cdot dt} = w \cdot \Delta S,$$

а давление

$$p_д = \frac{F}{\Delta S} = w.$$

В случае идеально отражающей поверхности (коэффициент отражения $\rho = 1$) изменение импульса стенки в 2 раза больше (отражённая волна имеет тот же импульс, что и падающая, но направленный противоположно), и давление

$$p_д = 2w$$

Для поверхности с любым коэффициентом отражения $0 \le \rho \le 1$ давление равно:

$$p_д = w(\rho + 1). \qquad (17.62)$$

9. Излучение диполя. Диаграмма направленности излучения

Любой заряд, движущийся ускоренно, излучает электромагнитную волну. Мощность N излучения можно найти опять-таки из уравнений Максвелла; она пропорциональна квадрату заряда и квадрату его ускорения:

$$N \sim q^2 a^2 .$$

Рассмотрим электрический диполь с переменным дипольным моментом:

$$\vec{p}_e = q \cdot \vec{l} \ .$$

$\vec{l}$ – плечо диполя, изменяющееся гармонически с круговой частотой ω:

$$l = l_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\vec{p}_e = q \cdot \vec{l} = q \cdot \vec{l}_0 \cos(\omega \cdot t) = \vec{p}_0 \cos(\omega \cdot t)$$

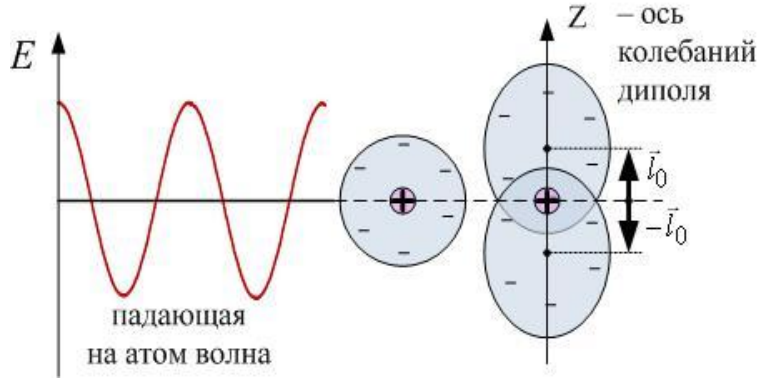


Рис.17.28

Амплитуда электрического дипольного момента:

$$p_0 = q \cdot l_0 .$$

Такие колебания диполя могут возникнуть, например, при воздействии на молекулу (атом) вещества переменного электрического поля (рис.17.28): электронное облако перемещается относительно ядра вдоль оси OZ.

Второй пример: колебания заряда на излучающей антенне (рис.17.29).

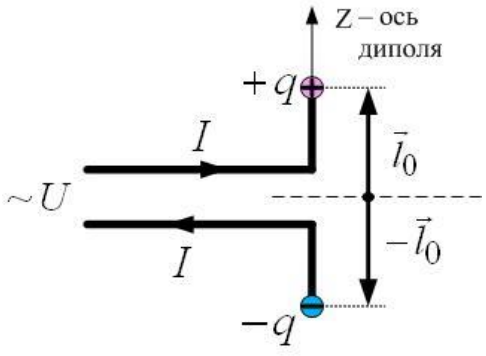


Рис.17.29

Ускорение колеблющегося заряда:

$$a = l'' = l_0 \cdot \left(\cos(\omega \cdot t)\right)'' = -\omega^2 \cdot l_0 \cos(\omega \cdot t).$$

Средняя мощность излучения

$$N \sim q^2 a^2 \sim q^2 l_0^2 \cdot \omega^4 = p_0^2 \cdot \omega^4$$

пропорциональна квадрату амплитуды дипольного момента и ***четвёртой степени частоты.***

Кроме того, мощность излучения ***неодинакова по всем направлениям***. На расстояниях, много больших длины волны излучения $r >> \lambda$, максимальные значения напряжённостей полей – электрического и магнитного – пропорциональны синусу угла θ между осью диполя и радиус-вектором данной точки и обратно пропорциональны расстоянию до диполя:

$$E_0(r,\theta) = \frac{E_0}{r} \sin\theta ,$$

$$H_0(r,\theta) = \frac{H_0}{r} \sin\theta ,$$

Последнее свойство объясняется законом сохранения энергии для сферической волны: чем дальше от излучателя, тем в б*о*льшем шаровом слое распределяется энергия волны.

$$E(r,\theta)=E_0(r,\theta)\cos\left(\omega\cdot t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)=\frac{E_0}{r}\cdot\sin\theta\cdot\cos\left(\omega\cdot t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right),$$

$$H(r,\theta)=\frac{H_0}{r}\cdot\sin\theta\cdot\cos\left(\omega\cdot t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right).$$

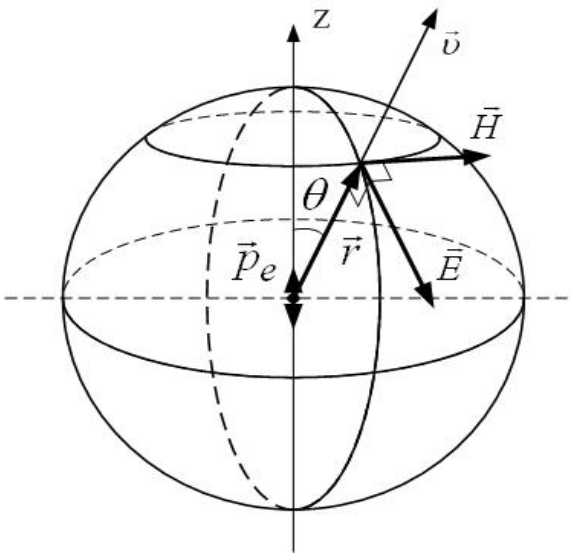


Рис.17.30

Интенсивность волны:

$$I\sim E_0(r,\theta)\cdot H_0(r,\theta)\sim\frac{E_0H_0}{r^2}\sin^2\theta\,.$$

Зависимость от угла θ можно объяснить так: диполь не может излучать в направлении собственных колебаний, так как вектор $\vec{E}$ волны не может иметь составляющих, перпендикулярных направлению колебаний диполя. Поскольку волна – поперечная, волны, излучённые в направлении колебаний (вдоль оси OZ) имели бы такую составляющую.

Направления векторов напряжённостей электрического и магнитного полей в сферической волне изображены на рис.17.30: $\vec{E}$ направлен по касательной к «меридиану», а $\vec{H}$ – по касательной к «параллели»; векторы $\vec{E},\vec{H}$ и $\vec{\upsilon}$ друг другу перпендикулярны и образуют правую тройку.

Можно привести диаграмму направленности излучения точечного диполя (рис.17.31). Она даёт представление об интенсивности волны *I*, излучённой в данном направлении под углом θ к оси колебаний диполя. В направлении колебаний диполя излучения нет, а в плоскости, перпендикулярной этому направлению, излучение максимально. Вектор $\vec{E}$ напряжённости электрического поля колеблется в плоскости картинки, вектор $\vec{H}$ – перпендикулярно ей.

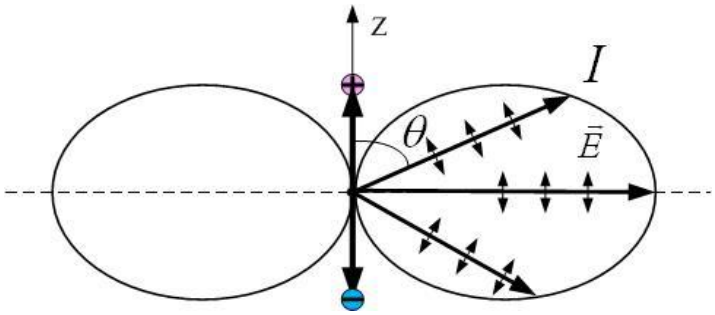


Рис.17.31

Библиографический список

1. Калашников, Н.П. Основы физики: учеб. для вузов: в 2 т. Т.1 / Н.П.Калашников, М.А.Смондырев. – 2-е изд., перераб. – М.: Дрофа, 2003. – 398 с.
2. Детлаф, А. А. Курс физики: учеб. пособие для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский . – 8-е изд., стер. – М.: Academia, 2009. – 719 с.: ил.
3. Савельев, И. В. Курс общей физики: учеб. пособие для вузов по техн. специальностям: в 4 т. Т. 2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика / И. В. Савельев; под общ. ред. В. И. Савельева. – М.: КНОРУС , 2009. – 570 с.: ил.
4. Курс физики: учеб. для вузов: в 2 т. Т. 1 / под ред. В.Н.Лозовского. – СПб.: Лань, 2000. – 576 с.
5. Трофимова, Т. И. Курс физики: учеб. пособие для инженер.-техн. специальностей вузов / Т. И. Трофимова . – 18-е изд., стер. – М.: Academia, 2010. – 557 с.: ил.